

Kóbor Ádám

**A piaci kockázatomérési eszközök alkalmazási lehetőségei a
pénzügyi stabilitás elemzésében**

Befektetések Tanszék

Témavezető: Dr. Király Júlia

Copyright © 2003

Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
Gazdálkodástani Ph.D. Program

**A piaci kockázatomérési eszközök alkalmazási lehetőségei a
pénzügyi stabilitás elemzésében**

Ph.D. értekezés

Kóbor Ádám

Budapest, 2003

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke	3
Ábrák jegyzéke	4
Motiváció	7
1 A pénzügyi válságjelenségek piaci kockázati vetülete, jellemző vonásai.....	14
1.1 A feltörekvő piacok szerepe a válsághelyzetek kialakulásában.....	15
1.2 Kockázatok a fejlett piacokon	18
1.3 A piaci válságok tapasztalati jelenségei.....	21
1.3.1 Növekvő volatilitás.....	21
1.3.2 Kockázatos szektorok együttes zuhanása	22
1.3.3 Portfólió-átrendezés: a kockázatmentes eszközök súlyának növelése	23
1.3.4 Különböző kockázati kategóriák koncentrált realizációja	24
1.4 A válság továbbterjedésének lehetséges magyarázatai.....	26
1.4.1 A fertőzés jelenségéről	26
1.4.2 Tökéletlen informáltságon alapuló megközelítések	34
1.4.3 A piac likviditásán alapuló megközelítések	37
1.4.4 Portfóliókezelési megközelítés	39
1.4.5 Növekvő kockázatkerülés.....	42
2 Válságjelenségek és befektetői hasznosság.....	43
2.1 Allokációk normális és nem normális hozameloszlás esetén.....	44
2.2 A kockázatelutasítás változásának empirikus mérése	51
2.2.1 Nemparaméteres kockázatmentes hisztogram.....	54
2.2.2 Opcióárazási modell alternatív eloszlás feltételezése mellett.....	55
2.2.3 A kockázatkerülési együttható becslésének elméleti háttere	58
2.2.4 Az 1998-as válság és az opciós piacok.....	66
3 Módszertani eszközök a kockázat mérésében.....	72
3.1 Feltétel nélküli statikus eloszlások alkalmazása	74
3.1.1 Nem-parametrikus sűrűségfüggvény.....	78
3.1.2 Stabil eloszlások.....	79
3.1.3 Kevert normál eloszlások	89
3.1.4 Egyéb leptokurtikus eloszlások.....	92
3.1.5 Esettanulmányok	94
3.2 Feltételes (autoregresszív heteroszkedasztikus) modellek.....	98
3.2.1 Normál-GARCH.....	99
3.2.2 Exponenciális súlyozású mozgóátlagolt variancia	101
3.2.3 Student-GARCH.....	102
3.2.4 GARCH-standardizált stabil eloszlás illesztés	103
3.3 Több kockázati faktor együttes mérése.....	104
3.3.1 Kovariancia mátrix elliptikus esetben.....	107
3.3.2 Dimenzió-csökkentés (PCA).....	108
3.3.3 Feltételes korreláció.....	113
3.3.4 Általános többdimenziós struktúrák (student-Kopula).....	119
3.4 Az ismertetett módszerek empirikus és tartalmi összehasonlítása.....	127
4 Alkalmazási lehetőségek a stabilitási elemzésekben.....	131
4.1 Piaci kockázati és stabilitási elemzések.....	131
4.2 Egy lehetséges kockázatelemzési modell: rezsimváltás	136
4.2.1 A rezsimváltó modellek leírása	138

4.2.2	Az $N=2$ állapotú, időben állandó átmenetvalószínűségekkel leírható rezsimváltó modell becslése	140
4.3	Globális eszközök	143
4.3.1	Russell 3000 amerikai részvény-index	143
4.3.2	Háromdimenziós kevert normál eloszlás becslése	144
4.3.3	Globális eszközosztályok és a rezsimváltó modellek.....	147
4.4	Hazai kockázati faktorok.....	149
4.4.1	Egydimenziós rezsimváltó modell: BUX index.....	149
4.4.2	Egydimenziós rezsimváltó modell: HUF/USD árfolyam	150
4.4.3	Megjegyzés a HUF/EUR árfolyam kapcsán.....	151
4.4.4	Háromdimenziós kevert normál modell: BUX, Állampapír, Forint.....	153
4.4.5	Háromdimenziós rezsimváltó modell: BUX, Állampapír, Forint.....	154
4.4.6	Záró gondolat.....	156
5	Függelék.....	158
5.1	A kockázatelmélet elemzési rendszere.....	158
5.1.1	Hasznosság és kockázatkerülés.....	158
5.1.2	Csökkenő abszolút kockázatkerülés	162
5.1.3	A klasszikus portfólióelmélet megközelítése.....	164
5.2	Stabil eloszlások szimulációja	168
5.3	A rezsimváltó modellek becsléséhez alkalmazott E-M algoritmus technikai lépései.....	170
	Hivatkozások.....	174

Táblázatok jegyzéke

1. táblázat	<i>Feltörekvő piaci válságok</i>	16
2. táblázat	<i>Bankok nettó külföldi követelései</i>	39
3. táblázat	<i>Származtatott termékekben fennálló nyitott pozíció</i>	40
4. táblázat	<i>Opciók árából származtatott RND paraméterek (1998)</i>	66
5. táblázat	<i>Segéd táblázat a stabil eloszlás becsléséhez</i>	86
6. táblázat	<i>Tőzsdeindexek illeszkedésvizsgálata</i>	95
7. táblázat	<i>Magyar részvények és a részvénytőzsi faktorok korrelációja</i>	112
8. táblázat	<i>VaR-becslés utótesztelése</i>	127
9. táblázat	<i>Kockázatmérési modellek összehasonlítása</i>	129
10. táblázat	<i>Globális eszközök becsült átmenetmátrixa (rejsimváltó modell)</i>	147
11. táblázat	<i>BUX becsült átmenetmátrixa (rejsimváltó modell)</i>	150
12. táblázat	<i>Forint árfolyam becsült átmenetmátrixa (rejsimváltó modell)</i>	151
13. táblázat	<i>Magyar eszközök becsült átmenetmátrixa (rejsimváltó modell)</i>	154

Ábrák jegyzéke

1. ábra	Brazil real, argentin peso és az orosz rubel árfolyama	17
2. ábra	Amerikai real GDP éves változása	19
3. ábra	Kibocsátók száma a Salomon „Bankruptcy Index”-ben	19
4. ábra	0,94-es igazodási faktorról számított EWMA volatilitás	22
5. ábra	BUX - S&P 500 napi EWMA korreláció	22
6. ábra	S&P 500 – 3 hónapos KJ napi korreláció	23
7. ábra	Befektetési alapok nettó pénzáramlása	23
8. ábra	Enron részvényárfolyam	24
9. ábra	4,5-5,5 év közötti USA állampapírok illetve a mindenkori...	26
10. ábra	Feltörekvő országok kötvényindexei	27
11. ábra	BBB vállalati kötvények havi spread-változása	28
12. ábra	A piaci funkciók romlásának folyamata (BIS [1999])	30
13. ábra	Volatilitás és korreláció	33
14. ábra	Magyar, lengyel és orosz állampapír indexek	37
15. ábra	EMBI+ és EMBI+ Argentína nélkül	42
16. ábra	Elméleti és számított kock. allokációk összevetése: normalitás	46
17.a, b ábra	Normál eloszlás és kevert normál eloszlás	47
18. ábra	Elméleti és számított kockázatos allokációk összevetése	48
19. ábra	Normál és kevert normál eloszlás: ferdeség és leptokurtikusság	49
20. ábra	Elméleti és számított kockázatos allokációk összevetése	49
21. ábra	Várható hasznosság normál és kevert normál eloszlás esetén	50
22. ábra	S&P 100 EWMA volatilitás és VIX index	51
23. ábra	Visszaszámított árfolyam-eloszlás az ideális világban	53
24. ábra	A volatilitás „mosolya” 2001. szeptember 20-án	54
25. ábra	Nemparametrikusan visszaszámított 2001. dec. DJIA eloszlás	55
26. ábra	Az S&P 500 opciói alapján számított kevert lognormális RND...	58
27. ábra	Az averzió -változás közelítése	64
28. ábra	Változás a kockázatelutasítási együtthatóban szept. 11. után	65
29. ábra	Kevert RND-k 1998-ban	67
30. ábra	Az averzióban bekövetkezett alsóági változások	67
31. ábra	EMBI+ spread-ek	69
32. ábra	LCPI index	70
33. ábra	A válság elmélyülését és áttérjedését összefoglaló ábra	71
34. ábra	VaR becslése HS módszerrel	73
35. ábra	A Dow Jones index napi logaritmikus változásai (1915-2001.)	76
36. ábra	BUX suruséggfüggvény (kernel)	79
37. ábra	Koutrouvelis módszere	86
38. ábra	Normál és $\alpha=1,5$ összeg-stabil suruséggfüggvény	88
39. ábra	A megfigyelt hozam ugrások folyamathoz tartozásának vszge	91
40. ábra	BUX: a magasabb volatilitású esemény bekövekeztének vszge	92
41. ábra	Alfa és a magasabb volatilitású esemény bekövekeztének vszge	92
42. ábra	A BUX napi hozamaira illesztett normál, stabil és student elo-k	95
43. ábra	A BUX leptokurtikusságát méro eloszlásindexek	95
44. ábra	3 részvény és a BUX alfa értékének alakulása 250 napos csúszó...	96
45. ábra	3 hónapos DKJ napi hozamváltozás illesztése	97
46. ábra	Skála napi hozamai minden tozsdei napot figyelembe véve	97

47. ábra	<i>Student szabadságfok és t-GARCH szabadságfok</i>	103
48. ábra	<i>BUX-ra és EWMA-standardizált hibatagokra illesztett alfa</i>	104
49. ábra	<i>A hozamgörbe változását magyarázó 3 faktor alakja</i>	109
50. ábra	<i>Az 1. faktor alakulása</i>	110
51. ábra	<i>A hozamgörbe 1. faktorváltozásának hisztogramja</i>	110
52. ábra	<i>Fokomponens-alapú amerikai ÁP hozamgörbe stressz-elemzés</i>	111
53. ábra	<i>Feltételes korreláció</i>	116
54. ábra	<i>2 dimenziós kevert normál szimuláció feltételes korrelációval</i>	117
55. ábra	<i>Kevert normál komponensek kontúrjai</i>	117
56. ábra	<i>2 dimenziós kevert normál szimuláció</i>	118
57. ábra	<i>2 dimenziós kevert normál szimuláció: feltételes és feltétel nélküli</i>	118
58. ábra	<i>2 dimenziós normál, student és studentkopula kontúrok</i>	121
59. ábra	<i>Peremvalószínűségek közös eloszlása 3 és 100 szabadság fokú...</i>	122
60. ábra	<i>MOL és OTP napi hozamai, normál, t és t-kopula szimuláció</i>	125
61. ábra	<i>DJIA, NIKKEI és BUX közös kopula -index</i>	126
62. ábra	<i>Indexek karakterisztikus exponensei</i>	126
63. ábra	<i>Kevert normál és rezsimváltó szimuláció</i>	138
64. ábra	<i>Amerikai részvények havi hozamainak eloszlása</i>	144
65. ábra	<i>Amerikai részvények: kevert normál eloszlás és kernel</i>	144
66. a-f ábra	<i>Globális eszközök – együttes hozamok felbontása</i>	146
67. ábra	<i>Stresszes állapot nyers és simított valószínűsége (globális eszk -k)</i>	148
68. ábra	<i>Havi hozamok és a baisse rezsim simított valószínűsége</i>	148
69. ábra	<i>BUX hozamok és a baisse rezsim simított valószínűsége</i>	150
70. ábra	<i>A forint dollárban kifejezett értéke</i>	150
71. ábra	<i>A forint heti értékváltozása és az első rezsim simított vszg-e (USD)</i>	151
72. ábra	<i>A forint euróban kifejezett értéke</i>	152
73. ábra	<i>A forint heti értékváltozása és az első rezsim simított vszg-e (EUR)</i>	152
74. ábra	<i>BUX és állampapírok heti hozamai, illetve a stresszes rezsim...</i>	155
75. ábra	<i>Állampapír heti árfolyamváltozás</i>	155
76. ábra	<i>Külföldiek tulajdonában lévő állampapír-állomány</i>	156
77. ábra	<i>Valódi és Arrow-Pratt becsült prémium</i>	161
78. ábra	<i>Eltérő kockázatkerülési fokkal rendelkező befektetők hasznosság...</i>	164
79. ábra	<i>Stabil eloszlás szimulációja és hisztogramjai ($\alpha=1,5$)</i>	168
80. ábra	<i>Stabil eloszlás szimulációja és hisztogramjai ($\alpha=2$)</i>	169

*A dolgozatot professzorom,
Sulyok-Pap Márta
emlékének ajánlom.*

Motiváció

A kockázatkezelés gyakorlati és kutatási szempontból egyaránt reflektorfénybe került az utóbbi évtizedben. A kutatási eredmények, észrevételek és tapasztalatok nemcsak a közgazdaságtan, hanem – főként a módszertani ismeretek terén – a matematika, statisztika, vagy akár a fizika területén végzett kutatásokon is alapulnak. A disszertáció írásához kapcsolódó kutatásaim során a „pénzügyes” vagy még inkább a „kockázatkezelő” szemével próbáltam összevetni és alkalmazni az utóbbi években kifejlesztett és publikált – vagy sokszor *újra* felfedezett módszereket. Az elmúlt évtized nemcsak kutatási eredményekben, hanem *pénzügyi válságokban* is bovelkedett. Az ilyen stresszes időszakokban félrevezető lehet (vagy akár veszélyesnek is mondható) a kockázatomérési módszerek *mechanikus*, azok korlátait figyelmen kívül hagyó alkalmazása. A *volatilitások* hirtelen megugrására, a *biztonságba menekülést (flight to quality)* jellemző *korreláció-változásokra* a lehetséges tartalmi magyarázatokat a közgazdaságtani összefüggések ismeretében adhatjuk meg. Elemzéseimben elsősorban ezekre a válságos helyzetekre összpontosítom a figyelmemet, és ezek tükrében hasonlítok össze az utóbbi időkben népszerűvé vált eljárásokat.

Legfontosabb tapasztalataim illetve megállapításaim az alábbiakban kerülnek összegzésre:

- ❑ Stresszes időszakban a volatilitások mellett a kockázatos szektorok (részvény és hitelpiac) közötti korrelációk is láthatóan megnőnek, rontva ezáltal a nyugodt időszakok statisztikái alapján várt diverzifikációs hatást. Ezzel összhangban a kockázatos szektort *leíró faktorok száma csökken*, azaz a befektetők döntési köre jobbra a *piaci eszköz* és *kockázatmentes eszköz* közötti átcsoportosításra szűkül – miközben nem különböztetik meg egymástól a különböző kockázatos eszközöket olyan mértékben, mint azt nyugodt piaci időszakokban teszik. Erre a jelenségre utal az *állampapír – kockázatos szektor* közötti korreláció erősen negatívvá válása is. Ezekhez a jelenségekhez *mind* közgazdasági, *mind* statisztikai interpretációk egyaránt társíthatók.
- ❑ A módszertani-statisztikai eszközök segítséget nyújthatnak a válsághelyzetek elemzésében, de a reallokációk és kísérelenségeik (*biztonságba menekülés*

illetve *fertőzés*) logikájának feltárásához önmagukban nem elegendők. Dolgozatomban szűken behatárolt korlátok között kívánok néhány kiegészítő magyarázatot találni:

- A portfólióelméletben hagyományosan elfogadott hasznosságfüggvényeket tekintve a piaci portfólió volatilitásának (várható) növekedése (illetve a kockázatos szektor várható hozama) önmagában is magyarázza a portfólió-átrendezést, de a stressz-idoszakbeli hisztérikus átcsoportosítás magyarázatát ki kell egészítenünk további lehetséges okokkal.
- (1) A széles körben elfogadott hasznosságfüggvényeket helyesnek tartva is javítható az elemzés minősége, ha a *normális eloszlás* helyett *leptokurtikus* jelleget mutató eloszlással modellezzük a faktorváltozásokat. Numerikus eszközökkel megmutatom, hogy *vastagszélu eloszlás* esetén, a *tapasztalati szórás változatlansága mellett is* csökken a kockázatos szektor alokációja a normális eloszlás esetéhez képest.
- (2) A klasszikusan elfogadott hasznosságfüggvény a vagyon nagyságára nézve konstans kockázatkerülési együtthatót feltételez, ami analitikusan jól kezelhető, de a stresszes idoszakok megértéséhez nem elegendő. Likvid opciós piac esetén a piaci szereplők várakozása és a kockázatkerülésük mértékében beállt változás *mérhető*, és az empirikus tapasztalatok alátámasztják a vagyon nagyságára nézve *csökkenő abszolút averzió* hipotézisét. Ebben az esetben a várható veszteségek miatt növekvő kockázatkerülés tovább magyarázza a portfólió átcsoportosítását a kockázatmentes szektor irányában – globális befektetők esetén ezek a reallokációk maguk is globális méretűek, amelyek portfóliókezelési szempontból magyarázhatják a fertőzés jelenségét.
- A stresszes napok mindig olyan szélsőséges eseményeket hordoznak, amikor a normális eloszlás mint elemzési és kockázatmérési eszköz messze elégtelen. A dolgozatban *alkalmazói* szempontból áttekintem az elmúlt idoszakokban népszerűvé vált alternatív eloszlásokat, kiemelem azok elonyös és hátrányos tulajdonságait, valamint megvizsgálom azt, hogy ezek a módszerek milyen információt nyújthatnak azon túl, hogy statisztikai értelemben jól illeszkednek.
- Egyetlen kockázati faktor helyett kettő vagy több faktor szimultán modellezése sokszor nehéz feladat elé állítja az elemzőt. A többdimenziós struktúrák

leírásban az elliptikus kontúrok helyett általánosabb alakzatokat is modellezhetünk, így például diverzifikálatlan együttes szélsőséges eseményeket is. Kettonél magasabb dimenziószám esetén az ún. *kopula* a *globális függőség*ről is információt adhat.

- A kezdetben foként makroökonómiai tanulmányokban alkalmazott *rezsimváltó modellek* kvantitatív szempontból alkalmasak az idoben változó volatilitások és korrelációk kezelésére, kvalitatív szempontból pedig jól azonosíthatók nyugodt és válságos időszakok, ezáltal alkalmas heurisztikusan könnyen értelmezhető modellek alkotására.

Dolgozatomban nem az általános *gazdasági* válságok problémájával foglalkozom, melyek egy sokkal szélesebb és átfogóbb témakört jelentenek. A *piaci* válságjelenségek áttekintése és magyarázatainak összefoglalása során sem a válságok kirobbanásának makrogazdasági okaira (pl. az árfolyamrendszer vagy eladósodottság problémáira), hanem sokkal inkább a gyakran azt követő és súlyosbító, illetve a válságot kiterjesztő hektikus folyamatokra és jelenségekre szorítkozok. A tartalmi magyarázatok keresése során feltételezem, hogy a pénzügyi rendszerben már jelen van valamilyen lehetséges makroökonómiai ok (pl. devizapolitikai vagy adóssághoz kapcsolódó), ami a kibontakozó válságot fundamentálisan magyarázza – én ezekkel a makrogazdasági okokkal nem foglalkozom, sokkal inkább a piaci reakcióra, befektetői magatartásokra és kockázati faktorváltozásokra koncentrálok. A téma rendkívül szorosan kapcsolódik a *kockázatkezelés* témaköréhez, hiszen ezekben a válságos időszakokban találkozhatunk az igazán nagy veszteségekhez vezető eseményekkel, melyekre célszerű lehet felkészülni.

A kockázatkezeléssel foglalkozó szakirodalom klasszikus módon megkülönböztet többek között *hitelkockázat*, *likviditási kockázat* és *piaci kockázat* kategóriákat. Ezek a kockázatok igen erős interakcióban vannak, és igen gyakran együtt realizálódnak, így a válságok során nem *helyettesítokről*, hanem bizonyos értelemben *kiegészítő* kategóriákról kell beszélnünk. A különböző kockázati faktorokkal magyarázható veszteségek sokszor koncentráltan és együttesen realizálódnak mind a kategóriák között, amikor *egyszerre* szembesülnek a befektetők a fokozódó *hitel*-, *piaci*, és *likviditási* kockázatokkal, mind pedig a kategóriákon belül – példa erre a piaci kockázatok együttes realizációja, amikor

egyszerre zuhan minden tozsdeindex, és nem érvényesül a nyugodt idoszaki tapasztalatok alapján elvárt *diverzifikációs hatás*.

Az amerikai *Enron* cég esete egyetemi példája lehet a *Merton-i* opció elméletnek (*Merton* [1974]): miután a csodveszély nyilvánossá vált, a részvényárfolyam zéró közeli értékre zuhant, így a hitelkockázat mellett a piaci kockázatok részét képező részvényárfolyam-kockázat is veszteségben realizálódott¹. Hasonló helyzetek következhetnek be a piaci és likviditási kockázatok interakciójában; illikvid piacon jóval nagyobb piaci árfolyamveszteséggel lehet a befektetéstől megszabadulni, ha megindul a menekülési verseny a hirtelenjében túlzottan kockázatosnak ítélt eszköztől. Dolgozatomban a piaci kockázat mérésére koncentrálok, de ezek a kockázatok közötti összekapcsolódások folyamatosan megjelennek, legalább az utalások szintjén.

A pénzügyi válságok a legtöbb, a pénzügyi *kockázat* valamilyen aspektusával foglalkozó közgazdász figyelmét felkeltették. Kockázatkezelési oldalról két alapvető aspektusból közelíthetők ezek a hektikus idoszakok:

- ❑ a válságok tartalmi magyarázata, közgazdasági *értelmezése*,
- ❑ a kockázatok, várható veszteségek *mérése*.

Mindkettőt fontosnak érzem, és kutatásom során mindkettőt próbáltam figyelni, hiszen a jelenségek a magyarázatához, az érveléshez és a hipotézisek empirikus igazoláshoz mérni kell tudnunk, ugyanakkor az összefüggések megértése, tisztázása nélkül a módszertani statisztikai modellünkben vakon megbízni igen veszélyes lehet.

A tartalmi értelmezés oldaláról számos neves közgazdász járult hozzá a kockázatelmélet fejlődéséhez és elmélyítéséhez. Az utóbbi évtized kockázatkezeléssel foglalkozó publikációi durván két részre oszthatóak: egy gyakorlati, mikroszintű oldalra, amely tipikusan a portfóliók egyedi (piaci, hitel, stb.) kockázatmérését hivatott tárgyalni, valamint egy szabályozói szintű makro oldalra, amely a válságjelenségek okaival, illetve azok *átterjedésével*, a *fertőzés* jelenségével és veszélyeivel foglalkozik. Természetesen a közös metszetek is megtalálhatók: a BIS külön tanulmányban (*BIS* [1997]) foglalkozik a rendszerszintű *aggregált kockázatmérés jelentőségével*, módszertani lehetőségeivel valamint az IMF rendszeresen közzétesz tanulmányokat (lásd pl.: *Barnhill, Papapanagiotou*,

¹ A kockázatok felsorolását itt ki is egészíthetjük: minthogy több éves számviteli csalásokat fedeztek fel az amerikai hatóságok a cég könyvelésében – azaz a befektetőket egyszerűen félrevezették, az *operációs* kockázat is dobogóra kerül.

Schumacher [2000]) a pénzügyi közvetítő rendszer kockázatainak feltárására. A pénzügyi stabilitásról másfél éve már az MNB is ad ki rendszeres tanulmányt.

Dolgozatom *első* részében rövid áttekintést adok a válsághelyzetek piaci tapasztalati jelenségeiről valamint a *kialakulás* és *fertőzés* leggyakrabban említett tokepiaci eredetű okairól és csatornáiról (a makrogazdasági okokra csak nagyon szűk keretek között utalok). A fejezet kritikus kérdései a válsághelyzetek általános leírásában és az ezeket magyarázó közgazdasági okok feltárásában rejlenek. A közgazdasági jellegű publikációk körében megtalálhatók:

- a tényfeltáró és aggregáló munkák, melyeket jellemzően nemzetközi intézmények (elsősorban az említett *BIS* és *IMF*) publikálnak,
- a *tökéletlen informáltságra* épülő magyarázatok *Lucas* nyomán *Stiglitz* vagy *Merton* munkáinak logikáját követik,
- a piacok *illikviddé* válására épülő elméletek például *Miller* és *Grossman* által felvetett gondolatokból táplálkozhatnak, de a bankrendszer-specifikus elméletek esetében *Diamond* modellje ugyancsak a klasszikus források közé sorolható,
- több magyarázat magukat a portfóliókezelési stratégiákat vagy a kockázatkezelési gyakorlatot, különösen például a *VaR*-alapú limitrendszereket teszi felelőssé a válságok áttérjedésében.

Dolgozatom *második* részében empirikus módszereket alkalmazok a gyakran felvetett, de nem megfelelő mélységben vizsgált tény alátámasztására, mely szerint válsághelyzetben a befektetők kockázathoz való viszonya, *kockázatkerülése is változik*, amely ugyancsak portfólió-reallokációs ok. (Megjegyzem, hogy az imént felsorolt elméleti modellek jelentős hányada *állandó abszolút kockázatkerülési együtthatón* alapszik – nagyrészt talán csak analitikus okokból.) Ez tehát ahhoz a következtetéshez vezethet, miszerint a válságokban bekövetkezett *veszteségek* önmagukban, hasznosságelméleti alapon is indukálnak más kockázati pozíciótól való szabadulási vágyat.

Az értekezés *harmadik* részében áttekintem és összehasonlítom illeszkedési, alkalmazhatósági és tartalmi értelmezhetőségi oldalról az utóbbi időben elterjedt (vagy még csak terjedő félben lévő) egy- és többdimenziós mérési és modellezési módszereket, majd utalást teszek azoknak a kockázatelemzés gyakorlatában illetve a stabilitási jelentésekben való felhasználási lehetőségekre. A fejezet kritikus kérdéseit a nem-normális eloszlás modellezése, illetve a stresszhelyzet alatt tapasztalható

sokszor elégtelen diverzifikációs hatás elemzése jelenti. A disszertáció *negyedik* részét – amely tulajdonképpen a harmadik fejezet szerves folytatása – egy rezsimváltó modellen alapuló elemzés képezi a hazai tokepiaci faktorok viselkedéséről, az elmúlt évek tapasztalatai alapján.

A dolgozat tehát három, egymástól alapvetően elkülöníthető részből áll. Az *első rész* egy leíró fejezet, mely áttekinti a pénzügyi kockázatok tekintetében kritikus időszakok, piaci válságok legfontosabb közös jellemvonásait². A *második rész* ezeket a magyarázatokat egészíti ki, ugyanis a zárt formában adott közgazdasági elemzések sokszor szigorú feltevéseken (pl. faktorváltozások normális eloszlása mint kis kockázat, illetve a piaci szereplők hasznosságfüggvényének speciális alakjára vagy a kockázatkerülésekre tett megkorlátozások) nyugszanak. A *harmadik*, legterjedelmesebb rész a lehetséges tartalmi magyarázatok után a válsághelyzetek kvantitatív elemzését, mérését helyezi középpontba. Az áttekintés és tesztelés során igyekeztem átfogó képet adni a különböző módszercsaládok alkalmazhatóságáról, és még inkább a gyakran nem említett korlátaikról. A *három részt* a *mérhetőség* és *értelmezhetőség* együttes igényének alapgondolata *kapcsolja össze*. A kockázatelemzés elméletébe és gyakorlatába sok különböző mérési módszert javasoltak bevezetésre – ugyanakkor nem mint fogadható el mint közgazdasági modell. Akár csak egy adott portfólió kockázatelemzésében, de különösen egy jegybanki stabilitási elemzésben elfogadhatatlan lenne fekete dobozok alkalmazása, ugyanakkor a stresszesemények és drasztikusan változó együttmozgások megfelelő minőségű elemzését is biztosítani kell. Olyan modellt kell kiválasztani, amely egyszerre lehetővé teszi a nyugodt és stresszes időszakok szimulálását, a két időszak közötti átmenet modellezését, rövidebb és hosszabb távú kockázatelemzésre alkalmas, és emellett közgazdaságilag viszonylag könnyen interpretálható. A dolgozat legutolsó fejezetében ilyen scenáriók előállítására kerül sor.

² A „pénzügyi válság” fogalma meglehetősen tág – általában az elemzők és befektetők széles köre egyetért konkrét esetek kapcsán, miszerint „válság” alakult ki, de pontos definíciót ennek ellenére is nehéz adni.

Megállapításaim az alábbi tételekben foglalhatók össze:

1. A fertőzés és biztonságba menekülés jelenségére több közgazdaságilag alátámasztott magyarázat létezik. Az általánosan alkalmazott analitikus hasznosságfüggvények eros feltevések mellett érvényesek, melyeket feloldva további magyarázatok nyerhetünk:
 - A “nagy kockázat” jelenléte hasznosságcsökkentő.
 - Az abszolút averzió idoben változik és a vagyon nagyságára nézve csökkenő (DARA). Ez a dinamikus jelleg empirikusan tesztelhető illetve mérhető.
2. Válságidoszakban a kockázati faktorok változása statikus normális eloszlással nem írható le megfelelően, alternatív (statikus és dinamikus) eloszlásokkal jobb illeszkedés tapasztalható. Az alternatív eloszlásoknak azonban nem minden esetben tulajdonítható közgazdasági értelmezés.
3. Válságidoszakban a diverzifikációs hatások gyengébbek, mint nyugodt idoszakban, a kockázati faktorok száma csökken.
4. A többdimenziós struktúrák leírására válságidoszakban a (statikus) lineáris korreláció nem elegendő. Alternatív megközelítéssel jobb illeszkedés érhető el. A feltételes korreláció dinamikus értelmezést nyer, a kopula struktúra a “globális függőségrol” adhat empirikus információt.
5. Mind kvantitatív mind kvalitatív szempontból elonyös tulajdonságokkal rendelkeznek a rezsimváltó modellek. Statisztikai szempontból jól leírható velük a az eloszlás leptokurtikussága, a válságidoszakban megnövekvő együttmozgás, továbbá jól elkülöníthetővé válnak a múltbeli nyugalmas és stresszes idoszakok. Egyedi sokkhelyzetek mellett dinamikus szimulációs elemzésre is alkalmas eszköz.

1 A pénzügyi válságjelenségek piaci kockázati vetülete, jellemző vonásai

A kockázatkezelési gyakorlatnak, bármilyen szintről is legyen szó, mind a nyugodtabb időszakok, mind a pénzügyi válsághelyzetek során jelentkező piaci kockázatok mérésére fel kell készülnie. A jobb minőségű modellezés érdekében azonban a válságidőszakok mechanizmusait, jellegzetességeit kell minél jobban megérteni, hiszen *egyrészt* ezek az időszakok mutatják a *különlegesebb, szokatlanabbnak tűnő* jelenségeket, *másrészt* ezek a szakaszok a kritikusak, hiszen a kockázatok ekkor realizálódnak nagyarányú veszteségek formájában. Az elmúlt évtizedben az alábbi, kiemelten nagyhatású és nemzetközi szintet elérő válságokat élte át a pénzügyi rendszer:

- ❑ 1994-95: mexikói „tequila” válság,
- ❑ 1997-98: kelet-ázsiai „influenza”,
- ❑ 1998: oroszországi „vírus” és LTCM,
- ❑ 2001. szeptember 11-i terrorcselekmények

A 2001-es év számos negatív hatású eseményt hozott a világ és így a tokepiacok számára is. A három, talán legjelentősebb és legjellemzőbb esemény sok tekintetben összefüggésben áll egymással, ugyanakkor számos nagyon eltérő jellemzőt is mutatnak:

- ❑ a *szeptemberi terrortámadás* egy recessziós jellemzőket mutató periódusában érte az Egyesült Államokat, és a 2001-es év sok tekintetben legnagyobb hatású eseményeként tartják számon. Rengeteg kockázati mutató (pl. volatilitás, visszaszámított volatilitás, hitelkockázati felár változás) az 1998-as orosz illetve LTCM válság idejében tapasztalt értékekhez hasonló szintet mutatott. A pillanatnyi sokkhatás gyorsan terjedt el az egész globális tokepiacon, és nemcsak az amerikai, de szinte minden tokepiac hasonlóképpen reagált a hírekre.
- ❑ *Argentína* mint a feltörekvő piacok közül az egykor egyik legjelentősebb nemzetközi kötvénypiaci kibocsátó országa, adósság- és devizaválsága kapcsán került a hírek középpontjába. A válság sok negatív hatása mellett tanulságos pozitívum, hogy a válság az 1998-as válsághoz képest csak

csekély mértékben és regionális keretek között terjedt tovább. Ebben mind a viszonylagosan jó és folyamatos tájékoztatás, mind az 1998-hoz képest eltérő befektetői jelleg és magatartás egyaránt pozitív szerepet játszott.

- az USA egykor hetedik legnagyobb vállalatoként nyilvántartott *Enron* nevével fémjelezhető csodhullám, amely sokak között a komplex származtatott termékek, hitel-átcsoportosítások, számviteli beszámolók és nyugdíjpénztári stratégiák kapcsán vetett fel kritikus kérdéseket.

Az, hogy a 2001-es év eseményei pontosan miként illeszkednek be a válságok sorába, még nem egyértelmű, de az jó eséllyel feltételezhető, hogy az emberek emlékezetében az amerikai terrortámadás emléke marad meg leginkább. Ha a piaci idosorokat tekintjük, 2001 folyamán ugyancsak a szeptemberi események okozták a legnagyobb romboló hatást.

1.1 A feltörekvő piacok szerepe a válsághelyzetek kialakulásában

Az elmúlt évtized globális pénzügyi válságai számos esetben a feltörekvő országok piacain robbantak ki. A 1. sz. táblázat³ a válsággócok gazdasági profiljában feltárt közös vonásokat illetve sajátosságokat összegzi.

Lamfalussy megállapítása szerint az egyik legjelentősebb, és legsarkalatosabb közös makrogazdasági jellemvonás az idézett feltörekvő piaci válságok tekintetében az, hogy nagyarányú rövid lejáratú külföldi adósság halmozódott fel a válsággócnak tekinthető országokban. *Diamond és Rajan* [2000] szerint a tapasztalatok valóban azt igazolják, hogy a rövid lejáratú adósságot felhalmozó ország összeomlási esélye nagyobb, és ennek oka, hogy azon országok, amelyek nem rendelkeznek megfelelő befektető-védelmi politikával, illetve szabályozásuk nem írja elő a megfelelő minőségű pénzügyi beszámolóképzést, csak limitált hosszúlejáratú adósságfelvételi kapacitással rendelkeznek. Az illikviditás veszélye miatt a befektetők jobbra csak rövidlejáratú hiteleket kívánnak nyújtani az ilyen országoknak, így minél nagyobb egy ország illikviditásának a veszélye, annál inkább jellemző rá a rövid lejáratú adósságszerkezet.

³ Lamfalussy, A. [2000] alapján.

1. táblázat

Paraméter	Latin-Amerika 1982-83	Mexikó 1994-95	Délkelet-Ázsia 1997-98	Oroszország 1998
<i>Krízis előtti időszak jellemzői</i>				
Tokebeáramlás	Jelentos. Befektetők: külföldi bankok	Jelentos. Befektetők: külf. bef. alapok, bankok, intézményi befektetők	Jelentos. Befektetők: külf. vállalatok, bankok	Jelentos. Befektetők: külf. államok, bankok, részvény-vásárlók
Tokekiáramlás	Jelentos és állandó	1994 elejéig mérsékelt, utána jelentős	A krízis kirobbanását megelőző hónapokig nincs, utána erős	Jelentos és állandó
Folyó fizetési mérleg	Nagyarányú deficit	Nagyarányú deficit	Nagyarányú deficit	Eleinte pozitív, de idővel negatívvá vált
Árfolyam-politika	Rögzített	Rögzített, reál felértékelődés	Rögzített, reál felértékelődés	Rögzített, reál felértékelődés
Hazai hitelállomány növekedése	Gyors	Gyors	Gyors	Nincs jelentős hitelállomány
Részvénytőke, ingatlan árak	– fejletlen piac –	Boom	Boom, de a krízis előtt eléri a csúcsot	Boom, de a krízis előtt eléri a csúcsot
<i>A krízis kibontakozása</i>				
Külső vagy belső sokkhatás (katalizátor)	Falkland háború	Elnökjelölt meggyilkolása	nincs	Olajár-csökkenés, politikai válság, egyoldalú moratórium
Külső gazdasági befolyásoló hatás	Nincs	Nincs	Japán recessziója	Folyamatos olajár gyengülés
Külföldi toke menekülése	Jelentos	Jelentos	Jelentos	Jelentos
<i>Fertőzés</i>				
A fertőzés iránya	Teljes Dél-Amerika, más fejlődő országok	Más latin-amerikai országok („tequila- effektus”)	További dél-kelet ázsiai országok	Brazília, továbbá fejlett országok tőkepiacai

A helyi bankrendszer a piaci válságok során sokszor jelentős szerepet játszott mind a krízis felépítésében, mind pedig a reálgazdaságra való kiterjesztésben. A délkelet-ázsiai válság elemzése során Miller [1998] a pénzügyi közvetítőrendszer kapcsán három alapvető és a nem megfelelő kockázatkezelési gyakorlathoz kapcsolódó okot talál a válság kibontakozására: *kamatláb-kockázati*, *devizakockázati* és *hitelkockázati* jelenségek együttes realizációját elemzi tanulmányában:

1. *Kamatláb-kockázat* vállalása szempontjából a helyi bankok rövid kamatfutamidejű forrásokkal finanszírozták hosszú kamatfutamidejű kihelyezéseiket. Ez a kamatlábérzékenységi rés magában hordozta azt a veszélyt, hogy kamatszint növekedése mellett az eszközök jelenértéke jelentősen csökken, miközben a forrásokhoz a megújítás során már csak magasabb kamatköltség mellett lehet hozzájutni.
2. *Deviza* oldalon a bankrendszer ugyancsak jelentős nyitottságot hordozott: az adósságok nagy része dollár volt, míg a kihelyezések az eszköz oldalon helyi

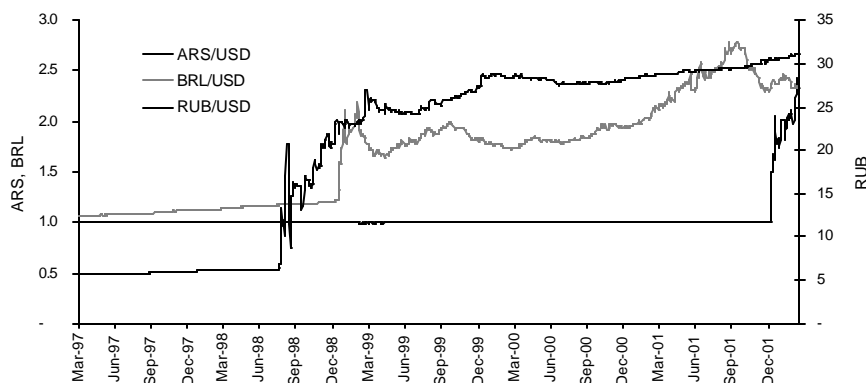
devizában történtek. Ez a devizaszerkezetbeli eltérés a devizaleértékelés melletti relatív forrásfelértékelődés veszélyét jelentette.

3. A kritikus *hitelkockázat* a bankok hosszú lejáratú eszközeiben testesült meg.

Gyakorlatilag tehát egy „jól” konstruált *pénzügyi robbanószervezetet* lehetett a 90-es évek közepén a délkelet ázsiai térségben felfedezni. Minthogy számos ország a dollárhoz kötötte devizáját, a válság kitörésekor – az árfolyamrezsim feladásával – devizájuk erosen leértékelt. Ez a devizakockázat⁴ azonban nemcsak a délkelet-ázsiai, hanem számos más feltörekvő piaci régióra is jellemző volt:

1. ábra

A brazil real és az argentin peso és az orosz rubel árfolyama



A 2001-es év legfontosabb feltörekvő piaci eseménysorozatának Argentína válságát tarthatjuk, amely persze nem volt kizárólagos potenciális válsággóc, hiszen például Törökországról is érkeztek negatív hírek, de amíg a nemzetközi török adósságpapírok besorolása csak a „B” szintre csökkent az év során, Argentína válsága jóval markánsabb hatású eseményt jelent az év szempontjából, hiszen egyfelől a Fitch IBCA minosító cégnél év végére a legalsó DDD szintre esett, másrészt a feltörekvő országok nemzetközi kötvénypiacán korábban az argentin papírok igen magas, közel 25%-os arányt képviseltek. 2002 közepén az ország devizaadóssága 130-140 milliárd dolláros nagyságrendet mutatott. Az ország gazdasági problémái azonban nem érték hirtelen váratlansággal a befektetőket, már 2000-ben 40 milliárd dolláros csomaggal jelent meg az IMF, majd 2001 júniusában egy 29,5 milliárd dolláros adósság swap-ra került sor (ennek során az 5 éven belül

⁴ Árvai, Zs., Vincze, J. [1998] tanulmánya részletesen tárgyalja a valutaválságokat, illetve a valuták sebezhetőségének kérdését. Ezen tanulmány szerzői ugyancsak megemlítik a válság definiálásával kapcsolatos nehézségeket.

lejáró papírok pénzáramlását 8-30 év lejáratúakra cseréltek, így kb. 8 milliárd dollárnyi adósságszolgálati terhet sikerült időben átütemezni). Ez ugyan egy rövid időre megnyugtatta a befektetőket, de a nyugalm nem bizonyult tartósnak. A devizarezsím is átment kisebb változtatásokon: a kereskedelmi áruforgalomra már 2001 nyarán megszüntették az 1:1 peso/dollár kurzust, és helyette az 50:50% euró-dollár kosarat vették figyelembe, amely eloszele volt a devizarendszer változásának, ez a lépés ugyanis nemcsak egy elvi változás volt a külkereskedelem tekintetében, hanem egy azonnali 7-8%-os effektív leértékelést is jelentett. Innentől tehát egyfajta duális devizarendszer jellemezte az országot, amely az export fellelédítése szempontjából tunt érdemi szándékú lépésnek. Ennek ellenére egy sokkal drasztikusabb devizareform vált szükségessé, hiszen a devizatartalékok már nem voltak elegendők az 1:1 rezsim fenntartásához, ugyanis 2001 folyamán a tartalékok kb. 40 %-kal, 20 milliárd dollár körüli szintre zuhantak az év végéig. A gazdasági válságot, melyet a GDP romló adatai is jól jellemeztek – az 1998-ban még +4%-os növekedés után a statisztikák 2001-re kb. -4,5%-os szintet jeleznek – politikai válság is kísért. 2002 január elején végül drasztikus devizareform mellett döntött az új argentin vezetés.

2001-re a többi korábban ugyancsak gazdasági problémákkal szembesülő feltörekvő országban – főleg Ázsiában – megfelelő szintű devizatartalékot sikerült felhalmozni, és a legtöbb helyen már lebegő árfolyamrendszer van érvényben, így viszonylag kevés az a rögzített árfolyamú ország, ahol spekulálni lehetett volna további leértékelésre. Ezek a tényezők is mind hozzájárultak ahhoz, hogy az argentin válság nem okozott olyan mértékű fertőzést, mint amit a korábbi válságok során tapasztalhattunk. Persze a gyenge fertőzéshez több további indok is fűzhető, melyek a tanulmány megfelelő, aktuális részénél lesznek kiemelve.

1.2 Kockázatok a fejlett piacokon

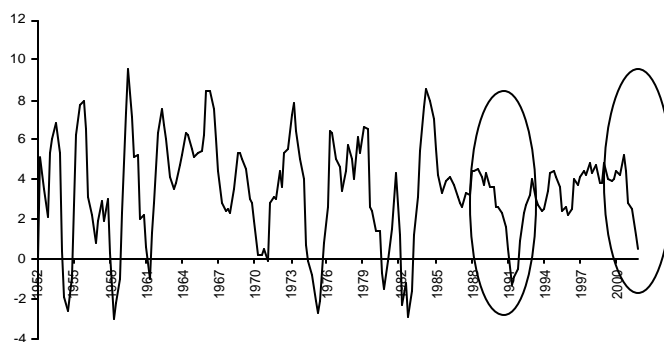
Bár a fejlett piacok államadósság illetve árfolyampolitika tekintetében általában és alapvetően alacsony kockázatot képviselnek a feltörekvő országokhoz képest, a gazdasági recessziók negatív hatásainak ugyancsak szenvedő alanyai lehetnek. Az elmúlt időszakok híresebb sokkhatásait mégsem általános makrogazdasági okok, sokkal inkább egy adott céghez, befektetői csoporthoz (pl. LTCM, Enron)

kapcsolódó egyéb okok jelentették. Ezek közé sorolhatók a komplex származtatott termékekkel kapcsolatos problémák, koncentrált befektetések, illetve a kívülállók felé nyújtott nem megfelelő információk.

Az évtized végére a világ fejlett gazdaságainak a recesszió tényével kellett szembenézniük. Az alábbi ábra az amerikai GDP változatlan áron számított éves növekedési ütemét mutatja, és szembeveti, hogy a mutató értéke az Öböl-háború idején tapasztalt szint közelébe süllyedt az elmúlt időszakban. Ez a recessziós jelleg önmagában megfelelő táptalajnak tekinthető ahhoz, hogy indokolható legyen egy a fejlett piacokon is bekövetkező csod hullám.

2. ábra

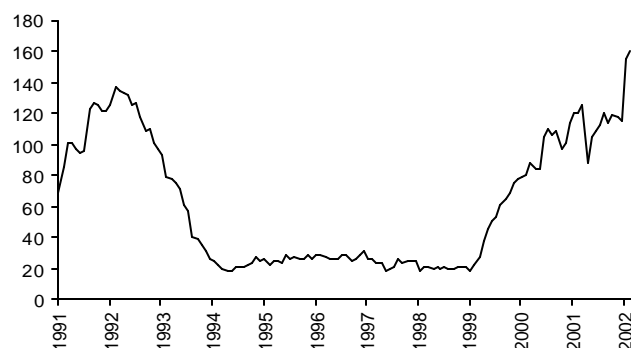
Reál GDP éves változása



A 90-es évek végére az USA vállalati szektorában bekövetkező hitelkockázat-növekedést illusztrálja az alábbi ábra, amelyen a csodesemények alakulását, tendenciáját illusztrálhatjuk.

3. ábra

Kibocsátók száma a Salomon "Bankruptcy index"-ben



Az Enron-csod indoklására azonban messze nem elegendők a 2001 őszi tapasztalható recessziós hatások. A fejlett piacokon is fellelhetők olyan kockázati

tényezők, amelyekkel időről-időre, utóbb az Enron esetében, szembesülnünk kell. Ezek között említhetők:

- ❑ Nem-pénzügyi vállalkozás válik piacvezetővé bizonyos derivatív-piaci szegmensekben (pl. energiapiaci származtatott termékek köre). Itt máris bizonyos párhuzam húzható az Enron illetve a Metallgesellschaft AG 1993-as esete vagy akár az Enron és az LTCM közé. Az Enron kapcsán Greenspan 2002 márciusi beszédében külön utalt arra, hogy az Enron korábbi növekedésében már nem az alaptevékenység, az energiatermelés játszotta a fő szerepet. Egy *energiaipari* vállalat rendkívül törekennyé válhat, ha nyeresége az immateriális, és kevésbé a tárgyi eszközeiből ered.
- ❑ Az Enron hitelderivatív ügyletei felhívják a figyelmet, hogy a számviteli szabályozásnak, a számviteli kimutatásoknak sokkal átláthatóbbnak kell lenniük. Míg az egyszerű eladósodást, tokeáttételt egyből jelzik a hagyományos számviteli eszközök, a derivatív termékekről jelenleg csak homályos képet kaphatunk.
- ❑ Komplex pénzügyi eszközök és tranzakciók, illetve azok számviteli nyilvántartása kapcsán elemzők és befektetők szerint átláthatatlan és bonyolult számviteli manóverekkel növelte a cég számviteli eredményét illetve tüntette el adósságát. 2001 október 16-án az Enron félmilliárd dolláros veszteséget ismert el az LJM2 befektetési csoporthoz kapcsolódó tranzakciói kapcsán, majd alig egy hónappal később a cég bejelentette, hogy a 1997-2000 közötti időszakra visszamenőleg módosítja a pénzügyi kimutatásait különböző befektetői csoportokkal (LJM1, Chewco) bonyolított tranzakciókhoz kapcsolódó *könyvelési hibák* miatt. Ezeket a csoportokat Andrew S. Fastow, az Enron korábbi elnökhelyettese illetve további egykori illetve aktuális Enron vezetők hozták létre és menedzseltek. Ezek a számviteli módosítások több százmillió dolláros nagyságrendben rontották a cég jövedelmezőségét, növelték eladósodottságát, és csökkentették a tulajdonosi toke értékét. Végül mindezek a módosítások a cég iránti bizalom összeomlásához vezettek, és az Enron csodót jelentett.

Az, hogy az információk milyen gyorsasággal érkeztek, illetve mennyire nem volt fogalma a piacnak az Enron kockázatairól, a cég hosszúlejáratú adóssága minosításának a változásai is jelzik:

- ❑ 1995. dec.-2001. nov. 1.: BBB+
 - ❑ 2001. nov. 1. – nov. 9.: BBB
 - ❑ 2001. nov. 9. – nov. 28.: BBB-
 - ❑ 2001. nov. 28. – nov. 30.: B-
 - ❑ 2001. nov. 30. – dec. 3.: CC
 - ❑ 2001. dec. 3. – : D
- (forrás: S&P, Bloomberg)

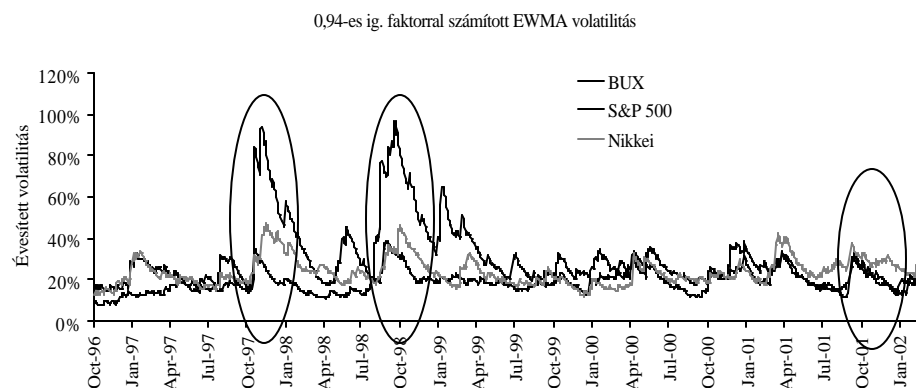
1.3 A piaci válságok tapasztalati jelenségei

1.3.1 Növekvő volatilitás

A válsághelyzetek elsodleges és természetes ismérve a ritkán tapasztalható mértéku árfolyamesés, valamint ezzel együtt az árfolyamingadozást méro *volatilitás* erősödése. Ezek az árfolyamzuhanások pillanatokon belül nagy veszteségeket okozhatnak a befektetőknek, modellezési szempontból pedig ezek a normális eloszlás által kezelhetetlen, ún. extrém események. A kockázatkezelési szakirodalom számos megoldást ismertet az ilyen események mérésére illetve modellezésére. Ezek lehetnek:

- ❑ a volatilitás alakulását dinamikus módon kezelo modellek: pl. GARCH illetve sztochasztikus volatilitás (a 4. ábrán látható EWMA volatilitás a GARCH család egy alcsoportjának is tekintheto – a módszerek részletesebb tárgyalására a 3-ik fejezetben kerül sor.),
- ❑ a normalitástól eltéro alternatív eloszlások: elméleti, árfolyammodellezési szempontból is alátámasztható *max-stabil* (*extrém*) illetve *összeg-stabil* (*alfa-stabil*) eloszlások, kevert eloszlások, avagy statisztikailag jól alkalmazható egyéb (pl. student-*t*) eloszlások,
- ❑ továbbá a különböző eloszlások GARCH jelleggel való párosításai.

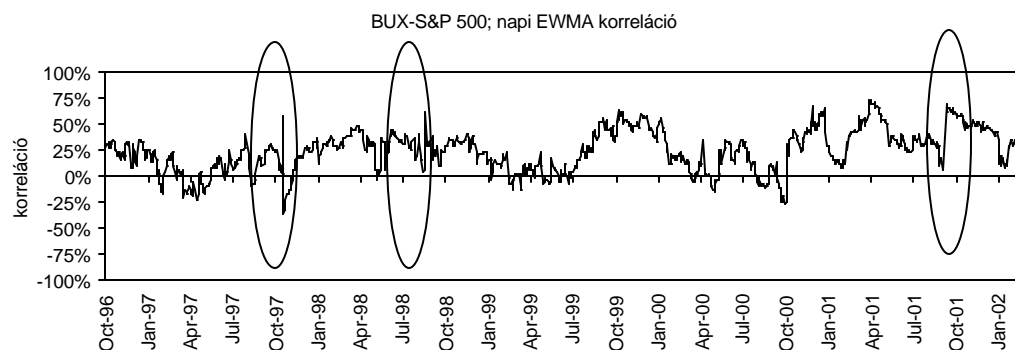
4. ábra



1.3.2 Kockázatos szektorok együttes zuhanása

Az erős *volatilitás* mellett további súlyosbító tapasztalati jelenség, hogy a zuhanások a kockázatos szektoron belül igen gyakran *együttesen* következnek be, azaz a kockázatos eszközök között *mért* korrelációk átmenetileg megnövekednek – akár egy országon belüli eszközöket tekintünk, akár nemzetközi szinten hasonlítunk össze kockázatos befektetési eszközöket.

5. ábra

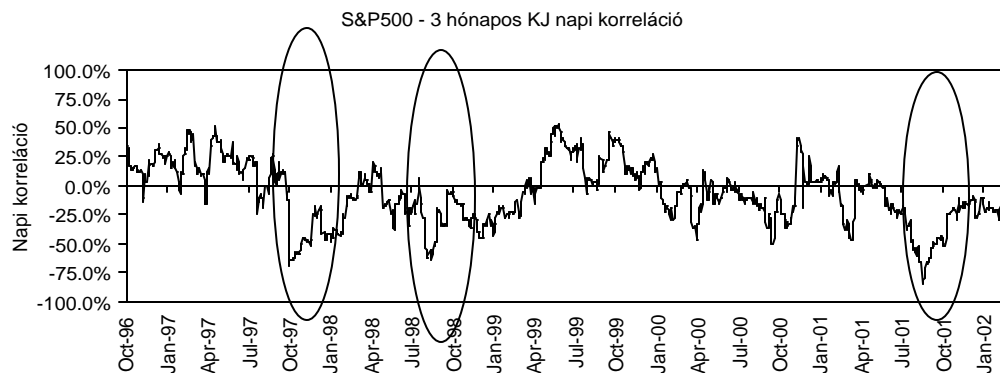


A hozameloszlások leptokurtikus jellegének tárgyalása mellett egyre több szakirodalom foglalkozik a korrelációk dinamikus megváltozásával, a krach helyzetekre feltételes korrelációk modellezésével, illetve a közösen bekövetkező szélsőséges („tail dependent”) eseményekre koncentráló és a globális függőséget leíró modellekkel.

1.3.3 Portfólió-átrendezés: a kockázatmentes eszközök súlyának növelése

Amíg a kockázatos eszközök közötti korrelációk megugranak a pozitív irányba (növelve az együttes veszteségek mértékét), a kockázatmentes szektor a kockázatos eszközökkel erosen negatív korrelációt mutat, amelyre a „flight to quality”, azaz a biztonságosabbnak ítélt eszközökbe történő átcsoportosítás fogalmával utal a szakirodalom. Ezt a jelenséget illusztrálja az alábbi ábra, amelyek a kockázatos és kockázatmentes szektorok közötti időszakosan hirtelen megugró erosen negatív korrelációkat ábrázolják.

6. ábra



A biztonságos eszközökbe történő allokáció (vagy „menekülés”) a korrelációk mellett a közvetlen pénzáramlási (flow of funds) statisztikákból is megfigyelhető – amennyiben ilyen adatok megfelelő gyakorisággal rendelkezésre állnak. A 7. ábrán a 98-as orosz és LTCM válság, illetve a 2001 szeptember 11-i terrortámadást követő időszak került megjelölésre.

7. ábra

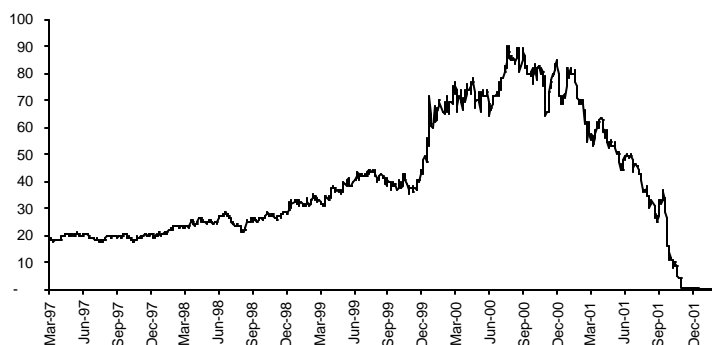


1.3.4 Különböző kockázati kategóriák koncentrált realizációja

A hitelkockázat, piaci kockázat és likviditási kockázat igen gyakran együttesen eredményez veszteségeket a befektetők számára. A különféle kockázati kategóriák együttes realizációjára kurrens példaként hozható ismét az Enron, amely a már említett *Merton*-i opciós elmélet példája: miután a csodveszély nyilvánossá vált (eros hitelkockázat, várhatóan magas hitelveszteség), a 2001. nyarán még 40-50 dollár körül járó (bár a recessziónak megfelelően stabilan csökkenő) részvényárfolyam elérte az „erosen OTM” szintet, és novemberben már zéró közeli értéken „folyt a kereskedés”. Azaz, a hitelkockázat mellett a piaci kockázatok részét képező részvényárfolyam-kockázat is veszteségben realizálódott.

8. ábra

Enron



A piaci és likviditási kockázatok ugyancsak gyakran együtt realizálódnak: egy illikvid piacon jóval nagyobb piaci árfolyamveszteséggel lehet a befektetéstől megszabadulni, ha megindul a menekülési verseny a hirtelenjében túlzottan kockázatosnak ítélt eszköztől, tehát a válsághelyzetet súlyosbítja, illetve akkumuláló hatású, hogy a válságos piacokon a gyors eladási hullám kialakulása során a likviditás *kiapad*. A piaci zuhanások, hirtelen árváltozások két különböző módon következhetnek be: a kevésbé rossznak mondható eset, amikor magas volumen jellemzi a piacot (ami viszont nem azonos a magas fokú *likviditással*): ekkor – bár veszteség árán – de ha szükséges, meg lehet szabadulni a pozícióktól. A másik, ennél is rosszabb eset, amikor *kiszárad* a piac, és alacsony volumen mellett történik meg a zuhanás (ez viszont *azonos az illikviditással*). Az *első* esetben a likviditási fok

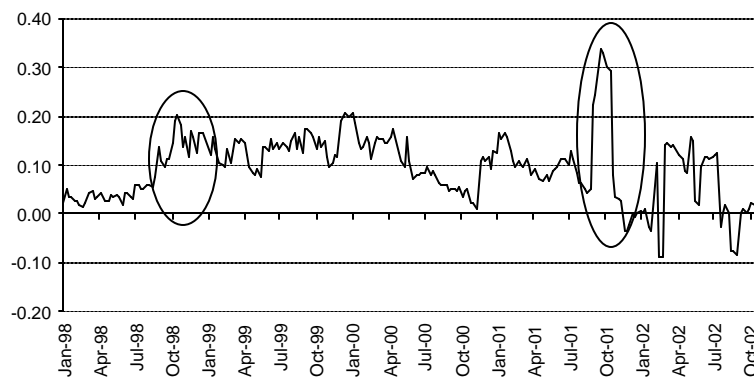
csökkenése mellett „felgyorsul az idő”, a kereskedések száma surubbé válik, és a nagymértékű záró árak közötti változások részben a kronológiai és a kereskedési idő jelentős eltérése miatt következhet be. Tartalmilag ezt úgy interpretálhatjuk, hogy olyan nagyhatású vagy sok információ érkezik rövid idő alatt, amely jóval több kereskedést indukál, mint egy egyszerű átlagos napon. A *másik* esetben az eladók és a vevők olyan mértékben kerülnek egyensúlytalan helyzetbe, hogy nincs kínálat-felszívó kereslet.

Az *első* esetben, magas kereskedési volumen mellett a tranzakciók közötti ármozgások nem feltétlenül térnek el *drasztikusan* a normálistól, csak a kronológiailag szabályos időközönként lemerített árváltozások közötti lépésközök rendkívül egyenetlenül helyezkednek el, amely az együttes eloszlást erősen leptokurtikussá teszi – tulajdonképpen egyfajta feltételes eloszlás feltétel nélküli méréséről beszélhetünk –, ezzel szemben a második esetben a tranzakciók közötti ármozgások egyértelműen szaggatottak, nem normálisak. (Megjegyzendő, hogy a legtöbb mérés szerint persze így is eltérnek a tranzakciónkénti árváltozások a normalitástól: például 2001. november 6-án, a Fed 50 pontos kamatvágását követően a Dow Jones 5 perc alatt 9340-ről 9435 szintre ugrott, amely egyáltalán nem mondható *normálisnak*.)

A 9. ábra illusztrációként szolgál a *likviditásba menekülés* jelenségére (*flight to liquidity*). Mivel az amerikai állampapírok – függetlenül attól, hogy standard lejáratú szektorba esnek és ezáltal benchmark-papírnak minősíthetők (on-the-run), avagy a benchmark kategórián kívül esnek (off-the-run) – azonos hitelkockázati és piaci kockázati jelleget képviselnek. Az egyetlen megkülönböztető jellemző, hogy a benchmark-papírok *likvidebbek*, és emiatt drágábbak, azaz alacsonyabb hozam mellett kereskednek velük. Ezt a likviditási prémiumot (azaz a hozamkülönbséget) mutatja az ábra, amely a két utóbbi globális stresszhelyzetben (98-as orosz válság és LTCM, illetve 2001. szeptember 11.) látványosan megugrott.

9. ábra

4.5-5.5 év közötti USA állampapírok illetve a mindenkor 5 éves
benchmark-papír hozamkülönbsége



A likviditás motívumán alapszik a hatékony piacok egy lehetséges alternatívájaként vagy kiegészítőjeként felállított ún. fraktál-piaci hipotézis, amely értelmében a piaci stabilitás feltétele a likviditás, és a piaci szakadások akkor következnek be, amikor *nagy* a volumen és *kicsi* a likviditás. A piacon a likviditás biztosítja, hogy az ár közel kerüljön ahhoz az árhoz, amelyet a piac a rendelkezésre álló információk szerint *méltányosnak* tarthat. A hipotézis szerint a befektetők eltérő időhorizonton gondolkodnak, és ezek a különböző befektetők azért tudnak kereskedni egymással, mert az információk eltérő hatást gyakorolnak a különböző időhorizonttal rendelkező befektetőkre. Stabil piacon a kockázatot a hosszú és rövid horizontú befektetők megosztják egymással. Az instabilitás akkor következik be, amikor a hosszú távú befektetők is rövid időhorizontúvá válnak. Ha a hosszú táv helyett mindenki a rövid távra koncentrál, megszűnik az egyensúly, megszűnik a likviditás – mindenki ugyanarra a hírcsatornára és időtávra koncentrál, mindenki egyformán értelmezi a híreket és uniform magatartás alakul ki.

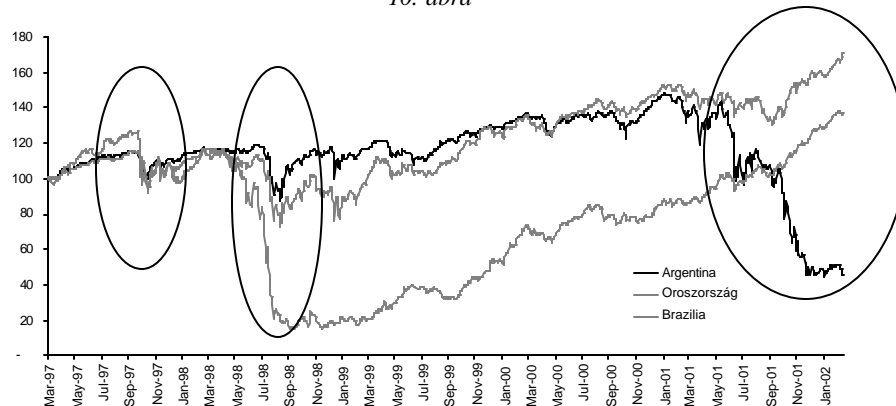
1.4 A válság továbbterjedésének lehetséges magyarázatai

1.4.1 A fertőzés jelenségéről

Az előző részben szó esett arról a tapasztalati jelenségről, hogy kritikus időszakokban a kockázatos szektorok, földrajzi régiók közötti együttmozgások, függőségek és tapasztalati korrelációk felerosódhatnak. Ha egyszerre több piac

zuhan a mélybe, igen gyakran a *fertőzés* jelenségéről beszélnek. Míg a korábbi időszakokban a fertőzést regionális jelenségnek tartották, és úgy vélekedtek róla, hogy megmarad a feltörekvő piacok körében, az utóbbi időben többször tapasztalható volt, hogy a fertőzés a fejlett piacok kockázatos eszközeire (hitelpozíciók, részvények) is áttért. A 10. számú ábra illusztrációként 3 feltörekvő ország nemzetközi kötvényeinek értékalakulását mutatja (1997=100).

10. ábra



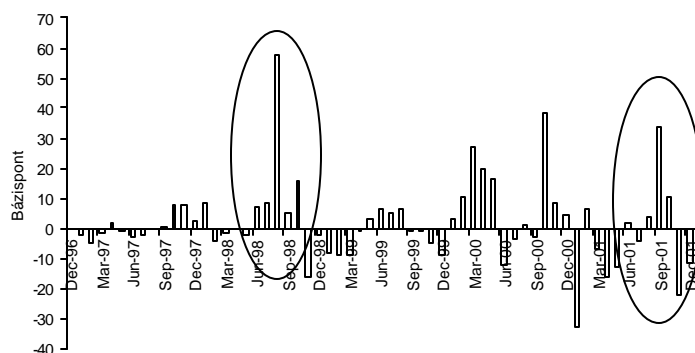
A fertőzés jelenségére számos definíció létezik. A „gyenge definíció” szerint az együttmozgás *szintje*, és nem az együttmozgás *növekedése* a kérdéses. A fertőzés megállapítására elegendő empirikus alátámasztás tehát két vagy több piac együttes zuhanása, azonban ez nem minden esetben informatív megállapítás. A tartalmi, „*eros definíció*” a kapcsolatok feltárására, az áttérjedés mechanizmusára figyel, és lényegében nem érdekli az elemzőt az együttmozgás mértéke. Ha két termék vagy piaci szegmens állandóan erős korrelációban van, és együtt zuhannak a válság időszakában, az nem azonos jellegű esemény azzal, mint ha két, nyugodt időszakban teljesen független piac válság-időszakban válik időszakosan (de épp a legrosszabbkor) erősen korrelálttá. Ez utóbbi esetre, azaz kifejezetten a korrelációk *megugrására* vonatkozik az erős „áttérjedt fertőzés” (*shift contagion*) fogalma (Forbes, Rigobon [2001]). Ezen definíció esetén pl. Brazília összeomlása az orosz válság hatására *fertőzésnek* minősíthető, ugyanakkor az, ha krach során az USA és Kanada tokepiacai egyaránt mélyrepülésbe kezdenek, nem. Az erős definíció tehát egy, a sokkhatás után a piacok közötti jelentős együttmozgás *megnövekedésére* szorítókozó szukítás. Ez gyakran olyan eltérő földrajzi elhelyezkedésű országokra vonatkozik, amelyek nem állnak egymással szoros gazdasági és kereskedelmi

kapcsolatban. Az USA és Kanada közel vannak egymáshoz és erős kapcsolatban állnak, így ha együtt zuhannak, akkor ez ebben az értelemben nem fertőzés, hanem „természetes”, várható következmény.

A 90-es évek krízisei esetében a fertőzés iránya és intenzitása eltérő volt. A „tequila-effektus”-nál az ázsiai fertőzés már jóval jelentősebb volt, ám 1998 nyaráig nem terjedt túl Ázsia határain. Az orosz válság kitöréséig tartotta magát olyan egyszerűsítő nézet, hogy a fertőzés csakis földrajzi jellegű. Az orosz válság azonban rácsáfolt erre, hiszen a válság erős hatást gyakorolt a dél-amerikai országok piacaira is, kifejezetten Brazíliára. Ráadásul a fejlett országok részvény- és kötvénypiacait is rendkívül kedvezőtlenül befolyásolta ez az időszak, amely a korábbi válságokra még nem volt ekkora intenzitással jellemző. Jelentősen erősödött ebben az időszakban például az amerikai kincstárjegy és kötvény közötti hozamkülönbség, valamint a hitelkockázati felár. A gyors *biztonságba menekülési* jelenséget erős *likviditás-preferencia* növekedés követte, az orosz válság végül erősen fertőzte a fejlett piacokat is.

11. ábra

Havi spread változás
(USA, BBB vállalati kötvények)



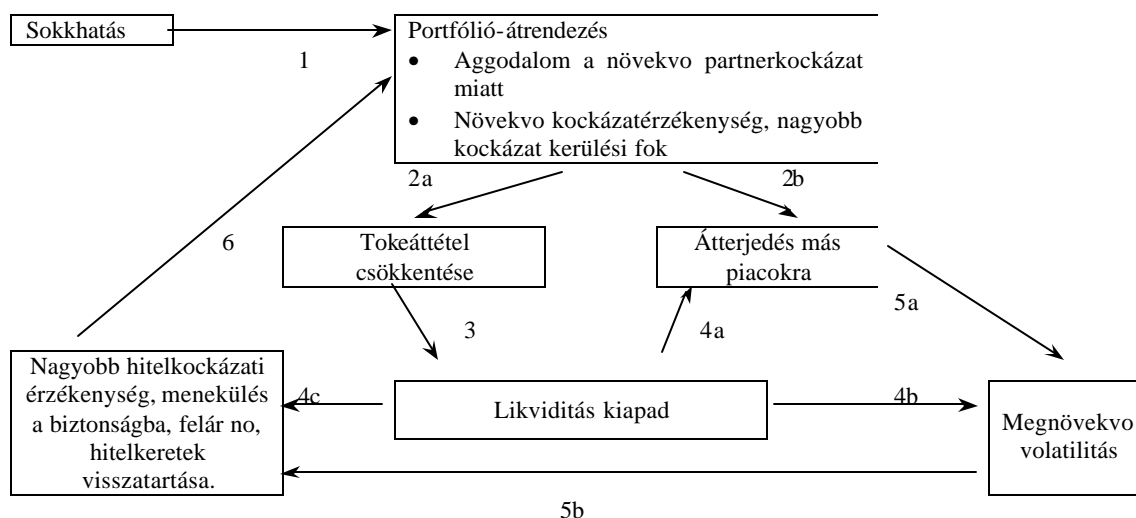
A BIS munkacsoportot hozott létre az 1998 őszi események vizsgálatára. A BIS jelentés (BIS [1999]) a 98-as események portfóliókezelési aspektusaira koncentrált, és kitüntetett figyelmet tanúsít a fertőzés jelenségének. A felmérés különlegességét az jelenti, hogy a készítek nem az elméletek szintjén vizsgáldták, hanem szó szerint „kimentek a piacra”, és interjúkat készítettek piaci szereplőkkel. Az interjúk során a fertőzés legfőbb okainak a *piaci szereplok* az alábbi tényezőket azonosították:

- ❑ Nem megfelelő szintű partner-hitelkockázat felmérés;
- ❑ A piaci likviditási kockázat elemzésének elhanyagolása;

- ❑ Az aggregált kitettségrol való megfelelő információ hiánya; se a tokeáttételrol, se a kockázat koncentráltóságáról nem álltak rendelkezésre megfelelő adatok;
- ❑ A kvantitatív eszközökbe vetett vak bizalom – a kockázatelemzés azokra a változókra koncentrált, amelyek könnyen mérhetőek (múltbeli hozamok, volatilitások, korrelációk), ám ezek nem voltak a stressz időszakára alkalmazhatók. A korrelációk összeomlásakor a diverzifikáció nem működött. Ezt követően a VaR mellett sokan felvették a szcenárió-elemzés eszközét is az elemzési eljárások közé e tapasztalatok hatására;
- ❑ Koncentráció: a globális piacon kis számú befektetési intézmény kezében koncentráálódtak pozíciók, így ez felgyorsította az áttérjedést;
- ❑ Kereskedési stratégiák uniformizálódása, illetve keresztfedezetek (az orosz pozíciókat pl. brazil vagy akár magyar pozíciókkal fedezték...).

Az interjúk és tapasztalatok alapján a BIS elemzői a 12. ábra szerint összegezték a piaci funkciók leromlásának folyamatát:

12. ábra



- ❑ 1: kezdeti piaci sokk, Oroszország és LTCM válsága; a VaR értékek megugrása, piaci kiértékelés és stop loss limitek hatására bekövetkező reakciók;
- ❑ 2a: portfólió-reallokáció, áttételes pozíciók zárása;
- ❑ 2b: a sokkhatás az egyik piaci szektorról áttérjed más szektorokra is a reallokáció miatt. Például a megnövekvő letéti követelmények miatt a befektetőknek más típusú eszközöket is el kellett adniuk, hogy teljesíthessék letéti kötelezettségüket;
- ❑ 3: az áttétel csökkentése miatt csökkenő aktivitás a repo és az arbitrázs piacokon;
- ❑ 4a: kivonulás az illikvid piacokról, a piaci szereplők más piacokon próbálnak likviditáshoz jutni;
- ❑ 4b: a likviditás elpárolgása hatására erős volatilitás növekedés;
- ❑ 4c: romlik a forráshoz jutás lehetősége: miközben a likviditás apad, a bankok zárolják a hitelkereteket is. Növekvő finanszírozási költségek. A hitelkockázattól való növekvő félelemben menekülés a biztonságos szektorba;
- ❑ 5a: a fertőzési hatás a magas volatilitást áttérjeszti más piacokra is;
- ❑ 5b: a magas volatilitás miatt a mark-to-market limiteknek való megfelelés érdekében eladási nyomás alakul ki;
- ❑ 6: növekvő hitelkockázat miatt a pozíciók átcsoportosítása.

Az MIT és az IMF által szerkesztett *International Financial Contagion* c. kiadványban megjelent tanulmány (Pritsker [2000]) rendszerezése szerint a fertőzés hatását a piacok között számos különböző jellegű gazdasági kapcsolat továbbíthatja:

- ❑ reálszektorok kapcsolatai;
- ❑ pénzügyi intézmények, közvetítők kapcsolatai;
- ❑ tokepiacok kapcsolatai.

A gazdasági sokkhatás egy gazdasági egységnél jelentkezik eloször, majd a vele kapcsolatban álló egységekre az iménti láncolatokon keresztül terjed tovább. A sokkhatások lehetnek (1) reálgazdasági eredetűek, (2) pénzügyi közvetítőt érő sokkok és (3) a tokepiacot érő sokkhatások.

1. Reálgazdasági sokkhatás továbbterjedésének útjai:

- véletlen egybeesés útján: több ország egymástól függetlenül ugyanazt a sokkhatást szenved el.
- közös globális sokkhatásról beszélhetünk, ha több ország ugyanarra a sokkhatásra érzékeny (pl. olajár-robbanás)
- *fertőzés útján*:
 - a. *reálszféra - reálszféra* kapcsolat: a válság tipikusan a külkereskedelem útján terjed tovább, amikor hirtelen és nagyarányú deviza-leértékelés miatt az exportár -importár relációk felbomlanak.
 - b. *reálszféra – bank - reálszféra* csatorna: amennyiben közös finanszírozó kapcsolódik több országhoz, az egyik finanszírozó ügyfelének összeomlása miatt visszavonhat hiteleket más ügyféltől is, például a tokekövetelményeknek való megfelelés érdekében (például az 1998-as válság Oroszországról Brazíliára történő áttérjedésében is szerepet játszott ez a hatás).
 - c. *reálszféra – bank – bank - reálszféra* áttételes csatorna: bankrendszer fertőzése – az egyik bank a bukásával magával ránt más bankokat. A gazdasági kapcsolatok hálózata hasonló logikák alapján bontható tovább:
 - d. *reálszféra – bank – tokepiac - reálszféra*: pénzügyi intézmények, közvetítők kapcsolatai révén bekövetkező fertőzés,
 - e. *reálszféra – tokepiac - nembank pénzügyi intézmény – tokepiac - reálszféra* kapcsolatai révén bekövetkező fertőzés: kiemelendő példa lehet az LTCM esete.
- 2. *Közvetítő-specifikus sokk*: ebben az esetben nincs reálgazdasági kiindulópont, ellenben egy nagybankot vagy más pénzügyi intézményt ér az első egyedi sokkhatás. Példaként említhetők a nagy japán bankok összeomlásai.
- 3. *Tokepiac sokkhatásai*, melyek a továbbiakban részletesebben is tárgyalásra kerülnek:
 - a. *korrelált információs csatornák*. Ha azonos fundamentális faktor két ország befektetéseire egyaránt hatással van, és az egyik országgal kapcsolatban kedvezőtlen hír érkezik, akkor a befektetők mindkét piacról kivonulhatnak. A *tökéletlen informáltság* tipikus magyarázata lehet az ilyen helyzeteknek: nem minden gazdasági faktor befolyásol

különböző országokat azonos vagy hasonló mértékben, tehát lehet, hogy egy adott specifikus faktor negatív irányú változása csak az egyik ország szempontjából hátrányos, de a befektetők tévesen azt gondolhatják, hogy ez a másik országot is negatívan fogja befolyásolni, és így úgy tunik, hogy *helytelenül*, azaz fundamentális ok nélkül vonulnak ki a befektetők a másik ország piacáról;

- b. *korrelált likviditási sokk*: valamilyen esemény vagy hír hatására sok befektető egyszerre kívánja a pozícióját likvidálni (ilyen likvidálási okok lehetnek a portfólió-rebalanszírozás, tokemegfelelési követelmények, veszteség-limitek, vagy akár a technikai elemzésen alapuló momentum-stratégiák);
- c. *jóléti sokkhatás*: bekövetkezett vagyonvesztés hatására a befektetők eleve kockázatelutasítóbbá válhatnak, ha hasznosságfüggvényük a vagyoni helyzetre nézve csökkenő abszolút averziót mutat.

A fertőzés statisztikai elemzése és tesztelése során több eljárást is alkalmazhatnak az elemzők:

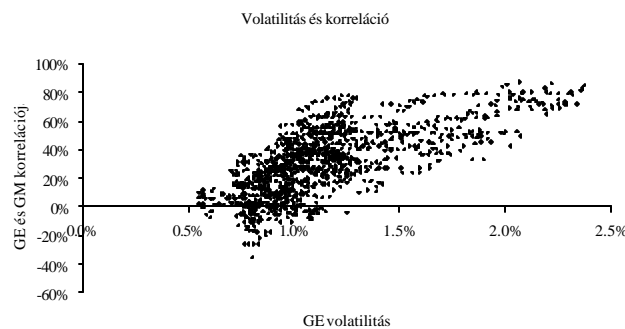
- Piaci faktorok *korreláció-változásának* tesztelése sokk-hatás után. Ha szignifikáns mértékben növekszik a korreláció, az a fertőzés empirikus alátámasztásaként értékelhető. (Az *IMF* [2002] piaci stabilitási jelentésében például több piac közötti 50 napos mozgóátlagolású korreláció egyszerű átlaga a fertőzés egyik lehetséges indikátora.)
- *Variancia-kovariancia* transzmissziója (tipikusan GARCH jellegű elemzés); a volatilitások együttes megnövekedése a fertőzés jele (lásd: 4. sz. ábra).
- *Kointegráltság*: az elemzés a piacok közötti hosszú távú kapcsolatra koncentrál a rövid távú sokkhatások helyett. A módszer hátránya, hogy nem tudja a rövid távú változásokat kezelni, amely sok esetben éppen tipikus a rövid lefutású válsághelyzetek során.
- *Probit-regresszió* során annak feltárására kerül sor, hogy az egyik ország válsága növeli-e más országok válságba esésének a *valószínűségét*⁵.

A korrelációk vizsgálata kapcsán *Forbes* és *Rigobon* [2001] felhívják a figyelmet, hogy a közös eloszlás feltételes jellegének figyelmen kívül hagyása félrevezető lehet, a volatilitás növekedése ugyanis önmagában statisztikailag magával vonja a

⁵ lásd pl.: Baig, T., Goldfajn, I. [1998] tanulmánya.

korreláció növekedését. A kiigazítatlan korreláció a variancia növekvő függvénye – így a tesztek torzítottá válnak. Az alábbi ábrán egy részvény EWMA volatilitásának és egy másik részvennyel számított EWMA korrelációjának együttes alakulását tüntettem fel, és látható hogy a volatilitás növekedésével egyre magasabbak a mért korrelációk is.

13. ábra



Megállapításuk szerint a kiigazítatlan „nyers” tapasztalati korreláció helyett a variancia növekedése melletti visszaszámított, kiigazított korrelációt kell mérni és tesztelni. A *feltételes korreláció* problémája miatt több elemzés más utat választ a függőségi viszonyok változásának alátámasztására. A korreláció mint lineáris kapcsolat mérése helyett a szélsőséges *extrém események egybeesésének tesztelését* javasolja például a *Bae és társai* [2000] által készített tanulmány, melyet *logisztikus regressziós* módszerrel vizsgálnak. (A logisztikus regresszió alkalmazását a szerzők az orvostudományból vették át, ahol az ideillő tipikus kérdés: ha N személy kapta el az influenzát, mi a valószínűsége, hogy K további ember is elkapja a bajt?) Idosoraik alapján a negatív extrém egybeesés valószínűségét nagyobbak találják, mint a pozitívokét, és empirikusan alátámasztottnak érzik a fertőzést. A korrelációt eleve nem tartják alkalmas kapcsolat leíró eszköznek, mert csak lineáris kapcsolatot mér, és nagyrészt az *elliptikus* eloszlások körére korlátozott. A cikk szerzői megemlítik a többdimenziós extrémérték-eloszlás alkalmazási lehetőségét is, de – mivel ott becsülni kell a függőségi struktúrát – más megközelítést választanak. Noha extrém események együttes bekövetkeztét becslik nem-lineáris kapcsolat feltételezésével, nem egy többdimenziós extrémérték-modellt alkotnak, de az általuk vizsgált kérdés tartalmilag azonos.

A fertőzés elemzése során talán a legnagyobb probléma annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi okozza azt az első ránézésre *irracionálisnak* tuno

magatartást, amikor a befektetők a gócnak számító országban kirobbant válságot követően más (eleinte hasonló profilú, jellemzően feltörekvő, majd a későbbiekben már a fejlett, nyugati) piacokról – legalábbis részlegesen – kivonják tőkéjüket a kockázatos szektorból, és azt a kockázatmentes szektorbaallokálják. Az *irrationalitás* képzete abból fakad, hogy a nem-góc országok fundamentális mutatói nem változtak a válság kirobbanása előtt és közben, ennek ellenére a befektetők adott piachoz való viszonya mégis jelentős mértékben, negatív irányban módosul. Ezt a kérdést sok apró, sokszor egymást kiegészítő, illetve egymásra kölcsönösen ható részletből lehet megválaszolni, és többször kiderül, hogy habár a jelenség maga nem is tűnik racionálisnak, maguk a befektetők egyéni érdekkövetésük során mégis megfelelnek a *racionalitás* kritériumainak.

1.4.2 Tökéletlen informáltságon alapuló megközelítések

Számos közgazdász foglalkoztatott az utóbbi évtizedekben a tökéletlen informáltság és a tokepiaci egyensúly kérdése. *Grossman* és *Stiglitz* [1980] *Lucas*⁶ nyomán kidolgozott információs modellje úgy tűnik, sok további modellalkotó számára jelentett példát, így röviden ismertetem ennek logikáját. Az alapmodellt nem a válsághelyzetek elemzésére, hanem a hatékony piacok tökéletlen informáltság melletti elemzésére állították fel, de alapvetéseik, gondolatmenetük több más modellben is visszaköszön. Modelljük szerint a tokepiacon két fajta, kockázatos illetve kockázatmentes eszköz van. Amíg a kockázatos eszköz hozamának várhatóértéke csak *költség* árán figyelhetők meg, a kockázatmentes eszköz hozama ismert. A piacon kétfajta befektető tevékenykedik: meghatározott arányban fordulnak elő informált „elemzők”, akik költségek ellenében információt gyűjtenek a kockázatos eszközök paramétereiről, valamint informálatlan „megfigyelők”, akik csak magát a realizálódott árat tudják megfigyelni. Mindkét kategóriába egyaránt *konstans* abszolút kockázatelutasítási együtthatóval jellemezhető hasznosságfüggvényüket maximalizáló befektetők tartoznak, akik periódusvégi vagyonuk (*kockázatmentes eszköz + kockázatos eszköz*) értékének hasznosságát maximalizálják. A modell megoldásakor mind a toke-, mind az információs piacon egyensúlynak kell fennállnia. A tokepiacon akkor van egyensúly, ha az informált és

megfigyelo szereplok által összesen keresett értékpapírok mennyisége megegyezik a kínált mennyiséggel (ez a követelmény természetesen befolyásolja az értékpapírok árát), az információs piacon pedig a hasznosságfüggvények mentén vizsgálható az egyensúly, amely akkor következik be, ha már nem érdemes egyik kategória képviselőinek sem átlépni a másik kategóriába. A tanulmány talán leglényegesebb megállapítása, hogy ezen célfüggvények és egyensúlyi követelmények mellett, ha sokan informálttá válnak, a kockázatos eszköz paraméterének egységnyi változása hatására a több informált szereplo jelenléte miatt nagyobb árváltozás következik be (a több informált szereplo nagyobb kínálati vagy keresleti nyomást eredményezhet), így pusztán az árváltozás megfigyelése egyre profitábilisabb lesz a költséget nem fizető, megfigyelo kategória számára, és az informált szereplok relatív nyereségessége romlik.

Ezt a költségek melletti információ-megfigyelést alkalmazta a fertőzés témájában igen gyakran hivatkozott Calvo és Mendoza [1999] szerzőpáros, akik hasonlóképpen két részre, informált és informálatlan csoportra osztják befektetőiket. Modelljük hasonló felépítése: az információs szerzésnek költségvonzata van, amit a konstans abszolút averziót feltételező hasznosságfüggvényük segítségével vesznek figyelembe a befektetői döntéshozatal elemzése során. A modellben a befektetők a portfólió-allokációjukat homogén országok között, egyenlő arányban, optimálisan diverzifikálva osztják meg. Azonban, ha az egyik országgal kapcsolatban információ sokk hatás érkezik, az informált befektetők – költség ellenében – pontos képet kaphatnak az információ valóságtartalmáról, míg az informálatlan befektetők csak az áralakulást tudják figyelemmel kísérni – azaz csak „követni”, másolni tudják az informált befektetők magatartását. Az egyensúly kritériumát hasonlóképpen az eszközpiaci és a hasznosságfüggvények segítségével kifejezett információ-piaci egyensúly jelenti. Azaz, csak addig fizetnek a befektetők információs költséget, amíg a költséggel csökkentett hasznosságérzetük meghaladja a követő magatartásból fakadó, nagyobb bizonytalansággal de biztos költség nélkül járó hasznosságérzetet. A szerzők szimulációs technikával jutnak végül következtetésre: a globalizált piacokon a fertőzéshez hozzájárul az, hogy egyre inkább optimálissá válhat az információ-szerzés helyett a követő magatartás. A piacok növekedésével a költséges

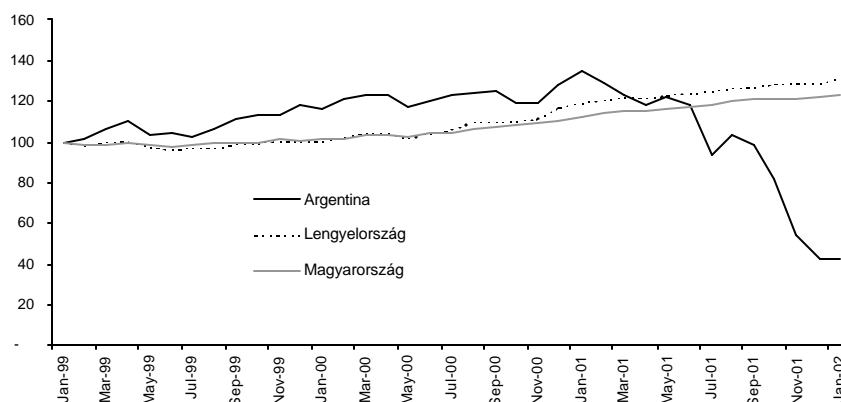
⁶ hazai részletes tárgyalása: Király, J. [1998]b

információszerzés hasznossága csökkeno, amely a befektetok adott piacról való tömeges kivonulásához vezethet.

Teljesen hasonló logikán alapszik egy másik modell, amely a *fejlett* piacokon folytatott piaci *követo magatartást* tárgyalja (Calvo [1999]). A Wall Street-en hasonlóképpen két fajta befektetot feltételezve vannak, akik fizetnek az információért, és vannak, akik csak más szereplokot figyelnek, de nem elemezik az információkat. Az informálatlan befektetok jelzéseket, *szignálokat* várnak az elemzo befektetoktól. Az informált befektetok tevékenységét egy egyszerű modellel írhatjuk le: cselekvésüket (eladás vagy vétel) a követok szignálként értelmezik. Az informáltak magatartását két hatás befolyásolja: az adott piaci kilátások, illetve egy zavaró tényező: valamilyen kívül álló független pozíciókhoz kapcsolódó *letéti követelmény*. Ha az informált befektetok vásárolnak, az jelentheti azt például, hogy pozitívan tekintenek az adott piacra. Az eladás ténye fakadhat negatív várakozásból is, de pusztán abból a tényből is, hogy letéti követelménynek kell megfelelnie, így egyszerűen likviditási okból ad el értékpapírt. (A Grossman-Stiglitz modellel szemben azonban nem *arat*, hanem *menyiséget* figyelnek az informálatlan befektetok.) Az informálatlan befektetok természetesen az adott piacot érinto kilátásokat szeretnék valójában *kilesni*, de ott van a *letéti paraméter* mint zavaró tényező: lehet, hogy egy független likvidálási ok csak, amely eladásra készíti az informált befektetot az adott piac fundamentális információitól függetlenül. Az informált szereplok *likviditási esemény* jelentkezése esetén eladják befektetéseiket, hogy a margin call-nak megfeleljenek – azonban ezt a pozíció csökkenést a nem informált szereplok – mivel nem tudnak különbséget tenni a fundamentális és a technikai okok között, fundamentális okból elkövetett lépésként értelmezhetik. Ez a nyilvánvaló félreértelmezés ismét egy lehetséges forrása a fertőzésnek a cikk szerzője szerint. Megjegyzendo, hogy a szerzők az informálatlan befekteteket *racionális* magatartással ruházzák fel, ami valóban igaz, hiszen az adott feltételek melletti hasznosságfüggvényüket maximalizálják.

A 2001-es argentin válság kapcsán a fertőzés csekély mértékét nagyrészt az információk folyamatos és széles körü közlése magyarázza. Így, amint a 14. ábra (1999=100) mutatja, pl. hazánk nemzetközi adósságpapírjainak értéke nem zuhant az argentin papírokkal együtt.

14. ábra



Az *argentín krízis* sok korábbi krízissel szemben nem hirtelen robbant ki, hanem folyamatosan követhető, némiképp előrejelezhető volt. Az argentín események időben elnyújtottan alakultak, és a nemzetközi intézmények folyamatosan próbálták kezelni is. A piac a folyamatos tájékoztatás hatására felkészültebben várhatta a további eseményeket. Érdekes összehasonlítani az orosz és az argentín kötvényindexek zuhanásának tempóját a 10. számú ábrán, ahol szembevetjük, hogy az orosz krach mennyire gyorsabb, hirtelenebb lefutású volt. Az IMF [2002] jelentése megállapítja, hogy az amerikai dollár alapdevizájú intézményi befektetők lényegesen jobban felkészülten várhatták a válság kibontakozását, mint a korábbi időkben. A felmérés azonban szembeállítja az informált intézményi befektetőket a más országbeli magánbefektetőkkel, akik lényegesen kevésbé voltak informálva, így az ő körükben tapasztalható volt bizonyos pánikhatás.

1.4.3 A piac likviditásán alapuló megközelítések

Külön csoportba sorolhatók azok a tanulmányok, amelyek a piac vagy a pénzügyi rendszer illikviddéválásával foglalkoznak, de hangsúlyoznom kell, hogy az előző – tökéletlen informáltsággal kapcsolatos – résztől nem lehet ezt a csoportot élesen elválasztani. Igen sok modellben az informáltság problémája és a likviditás kérdése összefonódik, például éppen a *várható likviditási helyzetre* vonatkozik a tökéletlen informáltság problémája.

A piaci likviditási kérdés tárgyalása önállóan vagy más tökéletlenséggel együtt, de mindenképpen meghatározó ágát jelentik a lehetséges hipotéziseknek

(illetve empirikusan igen jól igazolt tényeknek). A *piaci likviditás* fogalmát nem könnyű definiálni, és sokszor nem egyértelmű, mikor tekintünk egy piacot valóban likvidnek. Azt mondhatjuk, hogy egy piac akkor likvid, ha a befektetési pozíciótól *gyorsan*, és az eladás tényéhez kapcsolódó *árfolyamveszteség nélkül* tudunk megválni. Az illikviditásnak több jellemző tünete van. Egyfelől találhatunk olyan eszközöket, amelyekre napokig nincs üzletkötés, így aztán árfolyam-alakulásuk megfigyelhetetlen, ha van is üzlet, az kilendíti, darabossá teszi az árfolyam-grafikont, így egy ilyen termék piacán nem lehet gyorsan megválni a pozíciótól, illetve ha a „*mindent el lehet adni, csak az ár a kérdés*” megjegyzéssel élünk, valószínűleg komoly árveszteség mellett tudjuk csak továbbadni az eszközt. Ez a tökéletesen illikvid eset. Ám viszonylag folyamatos kereskedés mellett is kialakulhatnak likvidebb és illikvidebb periódusok. Abban az esetben, ha a *market maker* nem kíván üzletet kötni (illetve az üzletelést kevésbé vonzóvá szeretné tenni mások számára), például mert egy jelentősnek ígérkező információra vár, széthúzza a vételi-eladási különbözetet, és ha ez kitágul, kevésbé likvidnek tekinthetjük ezt a piacot, hiszen csak kedvezotlenebb áron zárhatjuk a pozíciónkat.

A piaci likviditási problémáját *Grossman* és *Miller* [1988] tárgyalták sokak között. Elemzésüket az 1987-es tozsdekrach leírására alkalmazzák, és modelljük erosen az amerikai kereskedési rendszerhez illeszkedik, tapasztalataik mégis általános érvényűvé tehetők. A modellben két fajta szereplőt vizsgálnak: az egyszerű befektetőt mint *ügyfélt* illetve *adott* számú *market makert*. A piacon kockázatos és zéró hozamú kockázatmentes eszköz van. Az alapkérdés, hogy ha az ügyfélnek valamilyen okból likvidálási szándéka van (azaz a két fajta szereplő csoport közül az *ügyfél* oldalról *nettó kínálat* jelenik meg), az időleges kereslet-kínálati egyensúlybomlást a *market makerek* mekkora árváltozás mellett képesek feloldani. A modell 3 periódusú: az 1. nap jelentkezik a likvidálási szándékból kiinduló túlkínálat, amit a *market makerek* szívnak fel, a 2. napon a *market makerek* próbálják tisztítani a pozíciójukat, azaz a fölös, előző nap felvásárolt eszközöket kívánják továbbadni más ügyfelek számára. Az optimális helyzetet a 3-ik napi végso jóléti állapottól függő, konstans abszolút averziót feltételező hasznosság-függvény határozza meg. A hasznosságfüggvényt a kockázatos és kockázatmentes eszközök közötti allokáció szerint kell maximalizálni. A likviditási eseményt kiváltó információ még az 1. napon válik nyilvánossá, és egyensúlyi feltételt az jelenti, hogy a kockázatos eszköz keresett és kínált mennyisége nap végére egyensúlyba kerül (és

ezt egész pontosan 3 elem határozza meg: a likvidáló befektetők optimális allokációja, a *market makerek* optimális allokációja és a tolók felvásárló befektetők optimális allokációja, mely nettó összege egyensúlyban zéró).

Az optimalizációs feladat megoldása során kiderül, hogy az 1. nap a túlkínálat hatására *idoszakos áresés* következik be, amely esés várható értéke a *market makerek* számától is függ. Ez az áresés szükséges ahhoz, hogy a *market maker*-ek az idoszakosan (1.-2. nap között) vállalt magasabb kockázatért – a megnövekedett kockázatot a járulékos pozíciók jelentik, melyek esetleges újabb információk hatásoknak van kitéve – hasznosságérzetük függvényében kompenzációt nyerjenek. A modellből leszűrhető fő tapasztalatok szerint minél kisebb a jelenlét költsége, illetve minél kevésbé kockázatkerülok (amit viszont konstans averziós érték jellemez) a *market makerek*, annál nagyobb számban vannak jelen, és minél magasabb a számuk, annál kisebb lesz az egyensúlyi áresés. Általánosabban: minél több szereplő van jelen a piacon, a hirtelen jövő kínálati nyomást annál kisebb áresés mellett tudják felszívni – azaz, annál *likvidebb* a piac.

1.4.4 Portfóliókezelési megközelítés

A fertőzési hatásban – a tokepiacra, pénzügyi közvetítésre szorítkozva – mindenképpen figyelmet érdemel a piacok fokozott integrálódásának hatása. A 2. táblázat mutatja a BIS-nek jelentő országok év végi becsült fennálló nettó külföldi követeléseinek az összegét, melyből képet kaphatunk annak gyors növekedési üteméről (adatok *milliárd dollárban* kifejezve):

2. táblázat

	1984	1987	1992	1997
Banki követelések	1 265	2 220	3 660	5 285
Értékpapír-követelések	410	984	1 687	3 358

Az integráltság melletti másik figyelemre méltó tendencia a származtatott termékek piacának volumenében bekövetkezett rohamos növekedés⁷. Noha a tipikus válsággóc országok még jellemzően nem rendelkeznek fejlett származtatott termék piaccal, de ha egyszer a válság áttérjed olyan fejlett piacra, ahol jelentős derivatív

⁷ A származtatott piacok növekedése kapcsán számos téves hiedelem látott napvilágot. Ezek szellemes áttekintését, értelmezését és esetenkénti cáfolatát lásd: *Csontos, Király, László* [1997]

piac is működik, a nagy tokeáttételi hatások és a letéti követelmények teljesítési kötelezettsége miatt további válság-akkumuláló hatást gyakorolhatnak. Azaz, egy fejlett tokepiacon bekövetkező sokkhatás után a befektetők derivatív pozícióik letéti és tokekövetelményének teljesítése érdekében zárhatnak, likvidálhatnak más piacokon szerzett pozíciókat is. A 3. táblázat az év végi, alaptermékek-ekvivalens pozícióban kifejezett nyitottságot tartalmazza, *milliárd dollárban* kifejezve:

3. táblázat

	1988	1992	1994	1997
Tozsdei	1 300	4 634	8 863	12 207
OTC	1 330	5 346	11 303	28 733

A korábbi magyarázatok mellett – nem kizáró, hanem kiegészítő jelleggel – igen gyakori felvetés, hogy magának a kockázatkezelési gyakorlatnak (VaR-limitek, letéti követelmények) is van szerepe a válság erősödésében, áttérjedésében. Az 1998-as időszak volt talán a VaR-ból mint varázsgömbből történő kiábrándulás időszaka is⁸. A BIS felmérésekor interjúvoltak nagy része szerint a válságidőszaki szélsőséges események messze túllépték VaR becsléseiket, különösképpen a *korrelációs mátrixok* által implikált kockázat-csökkentő hatás nem működött. Véleményük szerint az ilyen körülmények elemzésére a VaR abszolút alkalmatlan, és inkább stressz-elemzéssel lehet ezeket a napokat modellezni. (Jorion [1999] természetesen a VaR becsületének megmentésére sietett, helyesen hangsúlyozva, hogy a VaR „normál” piaci körülmények közötti idoszakra vonatkozó indikáció – és *t*-eloszláson alapuló szcenáriók szerint végzett elemzést az említett időszakra.) A VaR mint kockázatkezelési módszer esetleges fertőzés-generáló mechanizmusa a következő: a hirtelen megnövekvő VaR értékek és a VaR-limit túllépések miatt portfólió-átrendezés válik szükségessé: zárni kell azon pozíciókat, amelyek a VaR limitek átlépését magyarázzák. Mivel azonban sokan *hasonló* modellt alkalmaznak, *homogén* viselkedés jellemzi az egész piacot: a szimultán portfólió-átrendezés miatti kínálati nyomás önmagában a likviditás kiszáradásához és a volatilitás növekedéséhez vezet. Csakhogy, mivel 1998-ban az így fellépő illikviditás miatt a befektetők nem tudták zárni a VaR-t közvetlenül növelő pozíciókat, kénytelenek voltak más eszközöket eladni, ami fertőzési hatást generált. Ehhez az érveléshez azt

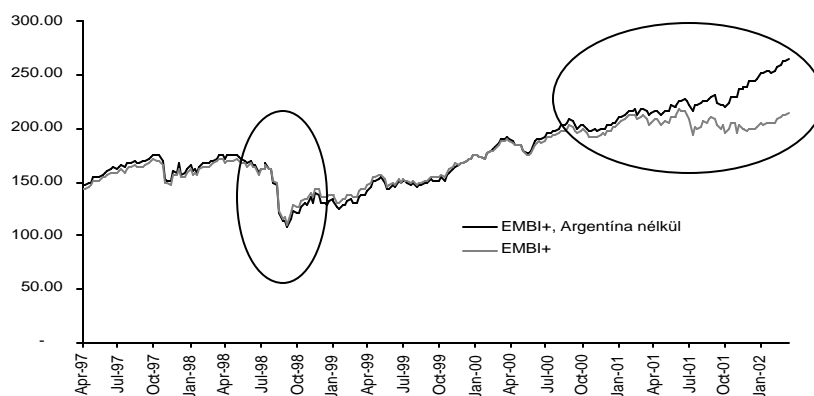
⁸ Ehhez hozzátehetjük, hogy a VaR varázsgömbként való túlértékelése illetve a belőle történő méltatlan kiábrándulás ugyanarról a torló fakad: sokaknak nem sikerült megérteni a VaR rendkívül egyszerű (s ezek szerint mégis sarkalatos) filozófiáját.

a megjegyzést fuzhetjuk, hogy 1987-ben részben hasonló okok (hasonló portfóliókezelési stratégiák) magyarázták a Dow Jones zuhanását, pedig akkor még nem volt a VaR elterjedt módszer: tehát nem maga a VaR módszer a felelos, hanem sokkal általánosabban az *uniform* viselkedés.

Schinasi és Smith [1999] hasonlóképpen azzal érvelnek, hogy a standard portfóliókezelői magatartás, a diverzifikációs reallokáció ugyancsak fertőzéshez vezethet, és nem találnak lényeges különbséget aközött, hogy VaR korlát miatti rebalanszírozás vagy egyszeru diverzifikációs ok magyarázza-e a hirtelen átcsoportosítást. Ez a cikk abból a szempontból méltó az említésre, hogy semmilyen tökéletlenséget nem keres (információs aszimmetria, illikviditás, korlátozó feltétel), hanem a standard portfólióelmélet síkján érvel. A fertőzés során egy kockázatos eszközt érő sokkhatás után a befektetők más kockázatos eszközök allokációját is csökkenthetik. Ha *tokeáttétellel* finanszírozott a kockázatos befektetés, tokevesztés után, amennyiben a portfólió várható hozama kisebb, mint a finanszírozási költség, a befektető egészen biztosan csökkenteni fogja a többi kockázatos szektorbeli allokációját – függetlenül VaR-limittól vagy letéti kötelezettségtől. Ez a tény a szerzők szerint önmagában magyarázza az orosz válság utáni fertőzést. A VaR-szabályt szimulációs technikával megvizsgálva arra jutnak, hogy a VaR-szabály illetve az egyszeru hozam-variancia optimalizálás (konstans averzióra felírt hasznosságfüggvény mellett) nem vezet lényegesen eltérő reallokációkra.

Argentína kapcsán a portfóliókezelés szempontjából a következő tapasztalatok szurhetők le. Az EMBI+ indexben, amely a feltörekvő országok által kibocsátott nemzetközi kötvények teljesítményét méri, Argentína volt az első vagy második legnagyobb súlyú ország. Bár ha a befektetők egyfelől csökkenteni is kívánták volna az argentin tag súlyát, a feltörekvő piaci portfólió teljesítményét sokszor ehhez az EMBI+ indexhez mint *benchmark*-hoz mérték. A túlzott eltérés azonban növelte volna a portfóliókezelő *benchmark*-hoz képesti kockázatát, azaz *tracking error*-ját, ez viszont a drasztikus allokáció-csökkentés ellenében hathatott. A fertőzés ellenében hatott, hogy a J.P. Morgan Chase a kb. 25%-os szintről 2,6%-ra csökkentette Argentína súlyát az indexben, így a dollár-befektetők a *tracking error* növelésének kockázata nélkül csökkenthették az ország súlyát portfóliójukban.

15. ábra



Az Enron kapcsán ugyancsak megemlítenő, hogy csodje ugyan megdöbentette a piacot és megnövelte a piac volatilitását, de önmagában azért nem vezetett szisztematikus, a pénzügyi rendszert destabilizáló következményekhez, mivel az Enron befektetői diverzifikált portfóliókban tartották a cég részvényeit. A kérdés inkább az, hány további cégnél (mint például az Enron-botrányt követő WorldCom esete) lehetnek még hasonló, a *számveteli beszámolók* torzítottságából fakadó rejtett kockázatok.

1.4.5 Növekvő kockázatkerülés

Egy további lehetséges magyarázó faktor magának a befektetői kockázatkerülésnek a megnövekedésén alapszik. Mivel ezt a kérdést sokszor viszonylag elhanyagoltan vagy túlzott általánosságban tárgyalják a stabilitási jelentések, a dolgozatomban ennek viszonylag nagyobb teret szentelek, és a következő fejezetben tárgyalom részletesen.

2 Válságjelenségek és befektetoi hasznosság

A kockázatos eszközök stresszhelyzetben történő árfolyamzuhanására, a közöttük lévő korrelációk drasztikus emelkedésére, illetve a kockázatos és kockázatmentes eszközök korrelációjának erosen negatívvá válására viszonylag könnyen megtaláljuk a klasszikus portfólióelméletből meríthető heurisztikus magyarázatot. A befektetők úgy érzékelik, hogy a várható jövőbeli kockázat nem fog a piacokon, és ennek feltételezése mellett rendezik át portfóliójukat. Ha hozzátesszük, hogy a befektetők általános feltételezés szerint kockázatkerülők, és válságidoszakban a várakozások szerint a várható hozamok jelentősen csökkenni fognak, természetesen a kockázatmentesnek tekintett állampapírba menekítik át befektetéseik számottevő hányadát. Az így megnövekedő kínálati nyomás a kockázatos szektorban ezután valóban árfolyamcsúszáshoz vezet. A gazdasági szereplők, befektetők kockázathoz való viszonyát általánosan meghatározza:

1. hasznosságfüggvényük: egyértelmű, hogy magasabb *kockázatkerülési fokkal* rendelkező szereplők magasabb prémiumot várnak el azonos mértékű kockázattól⁹;
2. pillanatnyi vagyoni helyzetük, amely a hasznosságfüggvény típusa szerint befolyásolhatja a *kockázatalutasítás* mértékét;
3. a *kockázat* nagyságrendje és jellege;
4. a *kockázati prémium*, amely a kockázatos és kockázatmentes szektorok várható hozamától függ.

Az optimális portfólió-kiválasztást (illetve a kockázatos – kockázatmentes szektorok közötti reallokációkat) ezen paraméterek ismeretében kell vizsgálnunk. A kockázatos szektorbeli allokáció csökkentését a portfólióelméletben klasszikussá vált, állandó abszolút kockázatkerülési együtthatóval jellemezhető (CARA), leggyakrabban „ $U(w) = \underline{w}'R - 0,5A\underline{w}'\underline{\Omega}\underline{w}$ ” alakban felírt hasznosságfüggvény két paraméterének, a várható hozam (R) csökkenésének, illetve a várható szórás ($\underline{\Omega}$ a kovariancia mátrix) emelkedésének (együttes) megváltozása jelentős részben

⁹ A hasznosságfüggvények az averzió viselkedése szerint három fő csoportba sorolhatók: állandó abszolút kockázatkerülési együttható (CARA), a vagyon nagyságában csökkenő abszolút averzió

indokolja. A *Függelék* első része áttekinti a hasznosságelmélet feltevéseit, alapfogalmait és összefüggéseit, valamint megmutatja, hogy ez a közismert és széles körben alkalmazott formula milyen feltételezések mellett állja meg a helyét, miként viselkedik, illetve azt, hogy egyáltalán miként vezethető le.

Továbbhaladva az általános áttekintésben, ha a kockázatos szektort felbontjuk különböző eszközosztályokra (pl. részvény, hitel), és ezek korrelációját is vizsgáljuk, nyilvánvaló, hogy a megnövekedő korreláció csak súlyosbítja a helyzetet. A függvény harmadik paramétere, a kockázatkerülési együttható a leginkább bizonytalan, és a legkevésbé megfigyelhető része a klasszikus modellnek.

A hasznosságelmélet fogalmi keretének ismeretében a piaci stresszhelyzeteket jellemző pánikszerű viselkedés – a portfóliók kockázatos szektorból a kockázatmentes szektor irányába történő reallokációjának két aspektusát vizsgálom és értelmezem, kiegészítve az első részben tárgyalt megközelítéseket:

1. A klasszikus pénzügyi hasznosságfüggvény alkalmazásával elkerüljük a nagy kockázat értelmezésének a lehetőségét. Első lépésben maradva a CARA környezetben, azonos tapasztalati (mért, megfigyelt) volatilitás mellett megvizsgálom, hogy miként alakul a kockázatos szektorba történő allokáció normális eloszlás melletti környezetben, illetve ha megengedjük a nagy kockázatok figyelembevételét. Ezáltal közelebb kerülünk a válsághelyzetek nyugodt időszakokat messze meghaladó reallokációjának megértéséhez.
2. Empirikus teszteket mutatok be és hajtok végre válságidőszakokra, amelyekkel a stresszhelyzetek növekedő kockázatkerülése illusztrálható.

2.1 Allokációk normális és nem normális hozameloszlás esetén

Ebben az alfejezetben három különböző esetet vizsgálom meg. A „ $-\exp(-Ax)/A$ ” alakú CARA hasznosságfüggvényt elfogadva, de nem ragaszkodva a normális hozameloszláshoz, megvizsgálom, hogy milyen eltéréseket tapasztalhatunk a kockázatos eszközök optimális allokációjában a normalitás „klasszikus” esetéhez képest. Az optimalizáció során a

(DARA), illetve állandó relatív kockázatkerülési együttható (CRRA). Mind a három csoport teljesíti az ún. HARA –harmonikus abszolút averzió tulajdonságot. Mindezekről a *Függelékben* írok részletesen.

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \mathbf{a}, A) f(x) dx$$

várható hasznosságérzetet kell maximalizálni a kockázatos szektorba történő \mathbf{a} arányú allokáció szerint, ahol $f(x)$ a kockázatos eszköz hozamának feltételezett (jelen elemzésben kevert normál) sűrűségfüggvénye, U a CARA alakú hasznosságfüggvény és \mathbf{a} jelenti a kockázatos eszköz hányadát a portfólióban. Az elemzés során az alábbi lépéseket követem:

1. Az első esetben csak tesztelem a modellt: normális eloszlás mellett határozom meg az optimális (hasznosságfüggvényt maximalizáló) allokációt. Az eredményt összevetem az elméleti, klasszikus formulából levezethető

$$\mathbf{a}_i = \frac{r_i - r_f}{A \mathbf{s}_i^2} \text{ megoldással}^{10}. \text{ Természetesen ez csak az illusztratív bevezetés,}$$

hiszen azonos allokációra kell jutni mindkét esetben.

2. A második esetben szakítok a normalitással, és ahhoz képest *nagy* veszteségeket (vagy akár nyereségeket) is beépítek a modellbe. A vastagszélu eloszlásmodell szerepét a két tagú kevert normál eloszlás kapja, melyről részletesebben a 3.1.3. *alfejezetben* írok. A kevert normál eloszlás feltétel nélküli együttes $\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{I} \mathbf{s}_1^2 + (1 - \mathbf{I}) \mathbf{s}_2^2}$ szórását és várható értékét behelyettesítem a klasszikus formulába, és így vetem össze a számított és a klasszikus formulából nyerhető optimális megoldásokat.
3. A harmadik esetben a kevert normál modell nemcsak vastagszélu, de a veszteség irányában ferde is lesz. A kevert modell várható értékét és tapasztalati szórását a klasszikus modellbe helyettesítve illusztrálhatjuk, hogy mekkora tévedéssel számolhatunk a közismert – de csak erős feltételezések mellett helyes – allokációs képlet alkalmazásával.

Az optimális portfólió-allokáció célja megtalálni azt az optimális α kockázatos eszközbe allokálandó arányt, amely a hasznosságfüggvényünket maximalizálja:

$$\max_{\mathbf{a}} U(\mathbf{a}) = E(u(w_0 + \mathbf{a}\tilde{x}))$$

ahol w_0 az induló vagyon nagysága, \tilde{x} pedig a kockázatot fejezi ki. Ebben az alfejezetben a CARA hasznosságfüggvényt alkalmazom, melynek oka, hogy a legtöbb esetben ezzel a feltevessel élnek a modellalkotók, ugyanakkor a normalitás –

¹⁰ Lásd: 5.1.3. függelék.

és ezáltal a „kis kockázat” – kizárólagos lehetőségének feltételezését feloldom. Az elemzés során numerikusan elvégeztem a

$$\max_a \sum_{i=1}^N -\exp(-A a r_i) f(x_i) \Delta x$$

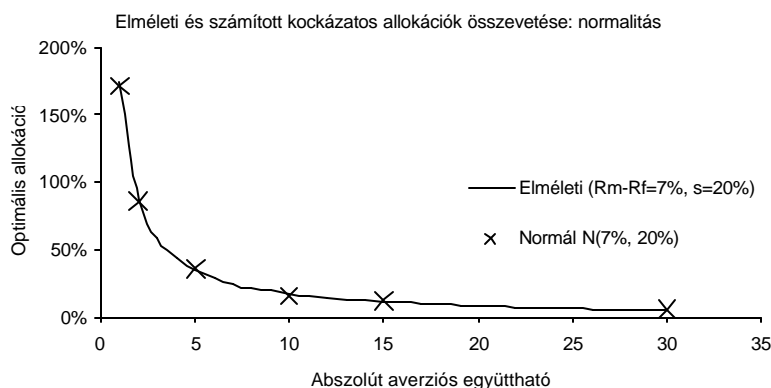
CARA hasznosságfüggvény optimalizálását, ahol $r_i \sim F(\cdot)$ a kockázati prémiumot modellezo, F eloszlású véletlen változó és A a konstans abszolút averziós együttható. Az optimális allokációt összehasonlítottam a normalitáson alapuló analitikus optimális allokációval olyan módon, hogy az elméleti (normalitást feltételező) optimális allokációt az alternatív kevert normál eloszlás tapasztalati varianciája alapján kalkuláltam. (Matematikai szempontból persze nem minden eloszlás esetén állítható, hogy a mért variancia megfelel egy véges varianciának.)

A különböző eloszlások – kockázatkezelés szempontjából releváns – tulajdonságairól a 3. fejezetben írok részletesebben.

1. eset: A parametrikus és a numerikus optimalizáción alapuló allokációk összevetése (normalitás esete)

Az első példában normális eloszlású változók alapján numerikusan optimalizált, illetve az analitikusan számított $a^* = \frac{n}{s^2} \frac{1}{A}$ optimális allokációkat hasonlítom össze – melyek a várakozásnak megfelelően közel megegyeznek. Ez tehát csak a módszer tesztelése, semmi tartalmi konzekvenciát nem vonok még itt le.

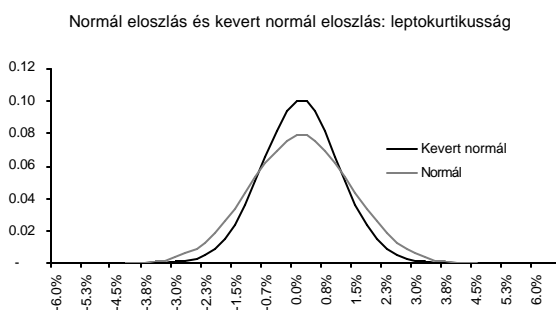
16. ábra



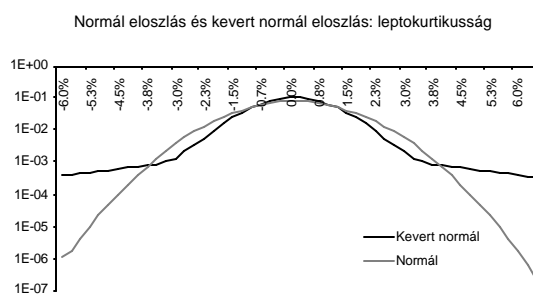
2. eset: Normál és kevert normál eloszlás melletti allokációk összehasonlítása

Az első teszt példa után kilépek a normalitásból, és alternatívaként a kevert normál eloszlást választom, amely jelen példában még csak a vastag szélek jelenségét mutatja, de továbbra is szimmetrikus. Azonos tapasztalati paraméterekkel (azaz várható értékkel és szórással) rendelkező normál, illetve kevert normál eloszlás sűrűségfüggvényének összehasonlítása látható az alábbi hagyományos (17.a ábra), illetve logaritmikus skálázású, 17.b ábrán:

17.a ábra

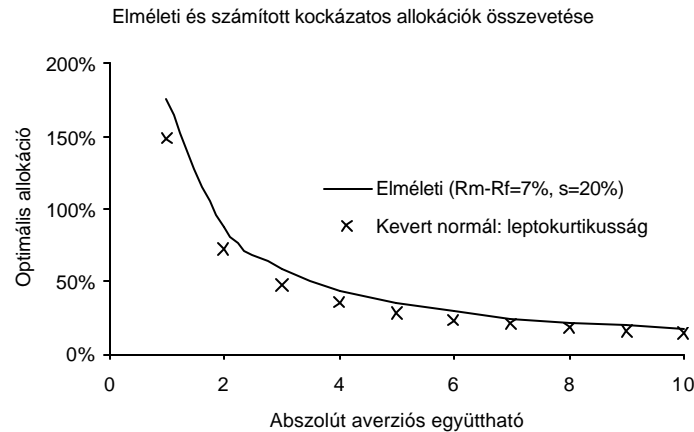


17.b ábra



A paraméterek éves szinten: a kockázatmentes hozam 5%, a kockázati prémium várható értéke $m=7\%$, $s=20\%$. A kevert normál eloszlás előállításakor a várható értéket változatlanul tartva, $I=95\%$ valószínűséggel $s_1=15\%$, azonban $I=5\%$ valószínűséggel $s_2=61\%$ -ra ugorhat. Természetesen nem reális azt feltételezni, hogy az egész év folyamán ilyen magas maradna a volatilitás. Időszakosan hektikussá válhat a piac, pl. egy 8%-os hozamesés pillanatnyilag „feldobhatja” a volatilitást napi 4% -ra, ami évesítve több, mint 61%!

18. ábra



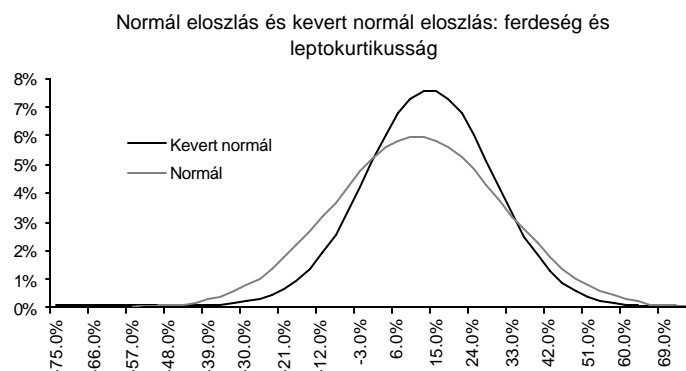
Az $A=5$ esetén például a kockázatos szektor optimális alokációjának aránya kb. 18%-kal csökkent.

3. eset: Normál és ferde kevert normál eloszlás melletti optimális alokációk

Ebben az esetben megtartom az előbbi átlagos 20%-os volatilitást¹¹, de a sokkos időszakokat egyúttal várható veszteséggel is párosítom. Így tehát nemcsak a variancia, de a várható érték is felbontásra (keverésre) kerül. Éves szinten a 12%-os piaci hozam (azaz 5% kockázatmentes kamatlábat feltételezve a 7%-os prémium) 95% valószínűséggel 15%-os várható értéku, de krach esetén, 5% valószínűségi szinten -45%-os érték: ami az utóbbi időszakok idosorait tekintve sajnos nem irreális szcenárió. Az ilyen módon eloállt suruségfüggvény évesített hozamtengelyen az alábbi formát mutatja:

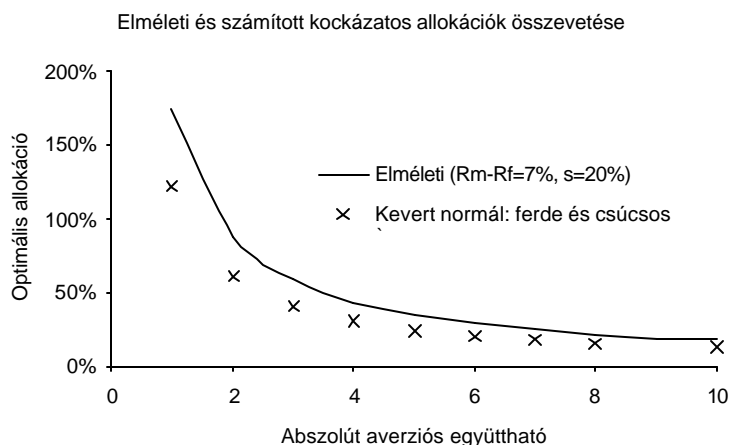
¹¹ Nem teljesen az elozo felbontás szerint: mivel most a várható érték is változhat, ez önmagában variancianövelő hatású, így a a sokkos időszak feltételezett varianciáját csökkenteni kellett, hogy a teljes szimulált idosor volatilitása visszaadja a kiinduló 20% -os volatilitást.

19. ábra



Ebben az esetben az allokációk – amint az várható is volt – tovább csökkentek az egyszeru vastagszélu eloszláshoz képest is.

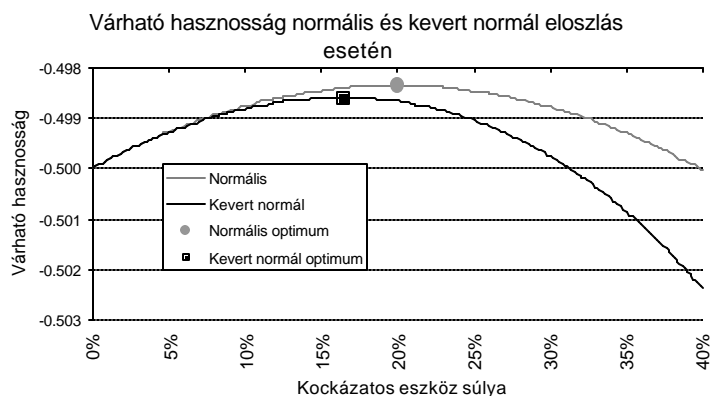
20. ábra



$A=5$ esetén például az elméleti értékhez képest kb. 32%-kal lett alacsonyabb az allokáció. A normalitástól való eltéréseinket nem véletlenül kezdtem a két normális eloszlásból kevert eloszlással. Ez az eloszlás kap központi szerepet a következő részben, ahol az opciók jegyzett árából visszszámítható *implikált kockázatmentes eloszlás* és a kockázatelutasítás kapcsolatát tárgyalom.

A 21. ábra $A=2$ averziós együttható mellett mutatja be a várható hasznosságérzetet normál illetve kevert normál eloszlást feltételezve, a kockázatos szektorba történő allokáció függvényében. Az ábra üzenete egyrészt azonos a korábbi tapasztalattal: a leptokurtikus és ferde eloszlás esetében a várható érték függvény már alacsonyabb kockázatos eszköz-alkokáció mellett felveszi maximum-értékét, de ezen felül azt is láthatjuk, hogy ez a maximum-érték alatta marad a normális eloszlás mellett elérhető legmagasabb szinttől.

21. ábra



Ortobelli, Rachev és Schwartz [2000] analitikusan vetették össze a Lévy (alfa-stabil) és a normál eloszlás melletti allokációs különbségeket. Elemzésükben azt találják, hogy alacsonyabb kockázatelutasítási együttható mellett relatíve a normál, magasabb elutasítási fok mellett relatíve a Lévy eloszlást figyelő befektető allokál nagyobb összeget a kockázatmentes szektorba. Ezt az eltérést annak tulajdonítják, hogy a magasabb kockázatkerülési tulajdonsággal jellemezhető befektető tulajdonít nagyobb jelentőséget a szélsőséges eseményeknek, a nagyobb kockázatvállalási hajlandósággal rendelkező befektető inkább az eloszlás közepére, a várható értékre koncentrál. Általánosságban azonban leszögezik, hogy ha a Lévy eloszlást tekintjük relevánsnak, az visszafogja a kockázatos szektorba történő allokációt.

Wu [1998] ugyancsak portfólió-allokációs szempontból vizsgálja a *ferde* és *leptokurtikus* eloszlások hatásait. Tapasztalata szerint – és egyáltalán nem meglepő módon – a pozitív *ferdeség* növeli, a *vastag szélek* jelenléte csökkenti a kockázatos szektor iránti vonzódást.

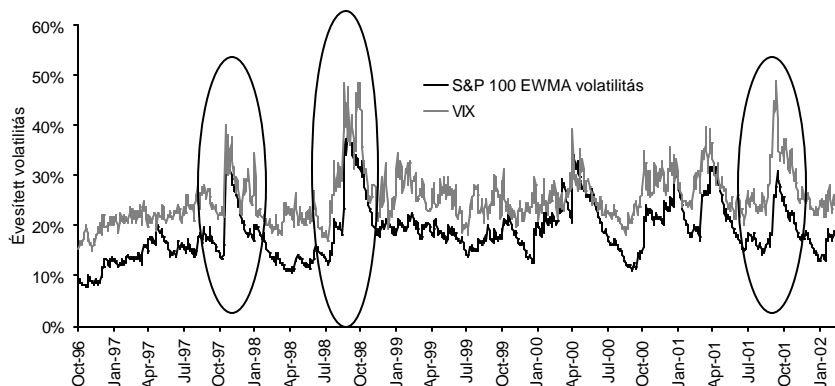
Az elemzés kapcsán megemlítenő, hogy az illikvid piacok erősen *szakadásos* jellegűek a likvidekhez képest, amely erős leptokurtikus hisztogrammal jellemezhető. Ebben a környezetben az illikvid piacok tehát pusztán ezen jellegükkel is kiválthatják az átcsoportosítást más piacok irányába.

2.2 A kockázatelutasítás változásának empirikus mérése

Ahogyan a határidős árak alakulásából, változásából némiképpen következtetni lehet a piac várakozásaira (az eszközhozam eloszlása várható értéke tekintetében), a likvid opciós piac számos további információt nyújthat a piaci szereplők árak vagy hozamok eloszlásával kapcsolatos várakozásairól. Ebben a részben *először* röviden áttekintem az ún. *implikált kockázatsemleges eloszlás* (Implied Risk Neutral Distribution, RND) becslésének elterjedt módszereit, majd ebből kiindulva, a hasznosságelmélethez kapcsolódóan eljárési lehetőségeket vizsgállok az *aggregált kockázatelutasítási faktor* nagyságának, változásának vagy jellegének mérési lehetőségeire.

Az opciós piac adataiból, áraiból egyfelől a piac által várt volatilitás nagyságának változásairól kaphatunk képet. Ennek relevanciáját érzékelteti például, hogy a CBOE visszszámított volatilitás indexet (VIX) is publikál. Az alábbi ábrán visszszámított ATM volatilitást láthatunk az S&P 500 indexre szóló opciókra. Az ábra tükrözi, hogy stresszes időszakok környékén (pl. 1998 osze, vagy 2001 szeptembere) a piaci hangulat is magasabb volatilitásról árulkodik, nemcsak az utólag számított statisztikai idosorok.

22. ábra



Ugyanakkor ennél több információt is szerezhetünk a piac várakozásairól, ha nemcsak az ATM, hanem az ITM és OTM opciók árazását is figyeljük – például a *volatilitás mosolyának* a meghatározásakor.

Az RND meghatározásakor az alapgondolat az elemi derivatívok, vagy *Arrow-Debreu* árak köréből származik (Breedon, Litzenberger [1978] illetve Ross [1976]). Ezek az elemi derivatívok a végállapot függvényében (ha valamilyen előre definiált feltétel teljesül) 1-et fizetnek, egyébként 0-t. Minthogy ilyen, elméleti szempontból tökéletes tulajdonsággal rendelkező derivatív termékekkel nem kereskednek a piacon, valahogy replikálni kell őket – melyet a *pillangó különbözettel* tehetünk meg, illetve helyesebben: közelíthetünk:

$$\{LC_{X_{i-1}} + 2SC_{X_i} + LC_{X_{i+1}}\}$$

A centrumban elhelyezkedő kötési árfolyam körül koncentrálódik a lejáratkori kifizetés, míg alatta és felette nincs kifizetés. Az összetett pozíció kifizetés-függvénye diszkrét esetben a

$$\frac{C(X = S_T - \Delta S_T) - 2C(X = S_T) + C(X = S_T + \Delta S_T)}{\Delta S_T} \Big|_{X=S_T} = 1$$

képlettel feleltethető meg az *Arrow-Debreu* termékek kifizetésének. Például, ha rendre 96, 100 és 104 az opciók kötési árfolyama, valamint a lejáratkori árfolyam 100, akkor a három opció kifizetése rendre 0, 0 és 4, továbbá $(0 - 2 \cdot 0 + 4)/4 = 1$. Belátható, hogy folytonos árfolyam-alakulás esetében, ha a kötési árfolyamok közötti lépésközöket is végtelenül kicsinek vesszük, ez megfelel az $X = S_T$ helyen vett

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}$$

deriválnak. Ezt a deriváltat *állapot-árazó függvénynek* is hívják, és elméletileg ennek segítségével következtethetünk a piaci szereplők által „beárazott” RND-re. Ha a kötési árfolyamok közötti lépésközök rendkívül kicsivé (folytonossá) válnak, az $X = S_T$ lejáratkori kifizetése valóban egy elemi származtatott termék kifizetésévé válik, azaz:

$$\lim_{\Delta S_T \rightarrow 0} \frac{V_{pillangó}(X = S_T, T - t, \Delta S_T)}{\Delta S_T} = \frac{\partial^2 c(X, T - t)}{\partial X^2}$$

ahol c jelöli a vételi opció értékét. Ez megfelel az *Arrow-Debreu* termékek árának is, és tudjuk, hogy ezen elemi termékek ára definíciójukból adódóan:

$$V_{A-D, S_T=X} = e^{-r(T-t)} q(S_T = X), \text{ ahol } q \text{ jelöli a kockázatmentes valószínűséget.}$$

Ebból már adódik, hogy

$$q(S_T) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 c(X = S_T)}{\partial X^2}$$

A c vételi opció X szerinti függvényével szemben követelmény, hogy konvex és monoton csökkenő legyen, ellenkező esetben arbitrázsra lenne lehetőség, illetve a becsült RND eloszlással kapcsolatos további követelmény, hogy $q(0) = 0$ illetve $q(\infty) = 0$ legyen. Black-Scholes környezetben, ahol az alaptermék dinamikája¹²:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

geometriai Brown-mozgás, természetes, hogy az árak tekintetében a lognormális eloszlást kell visszakapnunk – hozzátéve és felhívva a figyelmet az állandó volatilitásra mind az időhorizont, mind a kötési árfolyam skála tekintetében. Valóban, állandó volatilitás mellett Black-Scholes árakat kalkulálva, majd „visszaszámítva” a valószínűségeket, az alábbi hisztogramra jutunk:

23. ábra

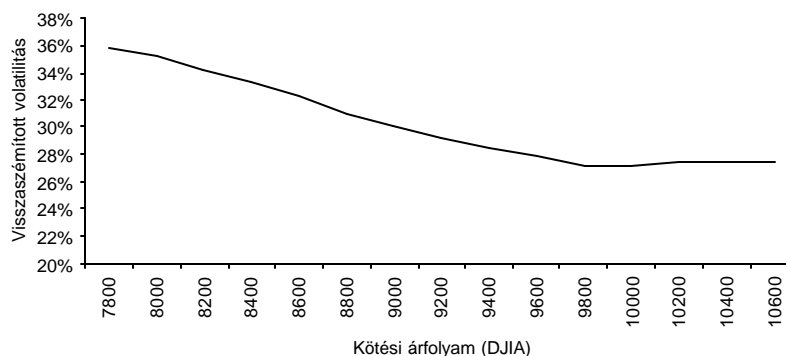


Azonban, sem lejáratra, sem a kötési árfolyam skálán nem beszélhetünk állandó *visszaszámított* volatilitásról – a piac ilyen eltérő visszaszámítható volatilitásokkal fejezi ki, hogy a Black-Scholes modell áraihoz képest az ITM és OTM végeken a feltételezett lognormális eloszlást leptokurtikusabbnak és/vagy ferdébbnek várja.

¹² Opciók árazásról magyar nyelven lásd pl.: Száz, J. [1999]

24. ábra

A volatilitás "mosolya" 2001. szept. 20-án



Amint a 24. ábrán látható, a lassuló amerikai és világ gazdaság, valamint a szeptember 11-i tragikus terrortámadás után a piac erőteljesen felülárta az OTM vételi opciókat az elméleti lognormális környezethez képest (az ábrát a 2001. decemberi lejáratra szóló opciók árai alapján készítettem).

A következőkben azt tekintem át, hogy ebből a "mosolyból" miként tudunk az eloszlásra következtetni. Az RND becslésének több technikai megoldása van (melyek részletes áttekintése olvasható *Bahra* [1997] tollából), és a gyakorlatban a becslés nem minden esetben nyúl vissza az elméleti alapot jelölő Arrow-Debreu árakig.

2.2.1 Nemparaméteres kockázatmentes hisztogram

Abban az esetben, ha valóban likvid a piac, alkalmazhatjuk „mechanikusan” a

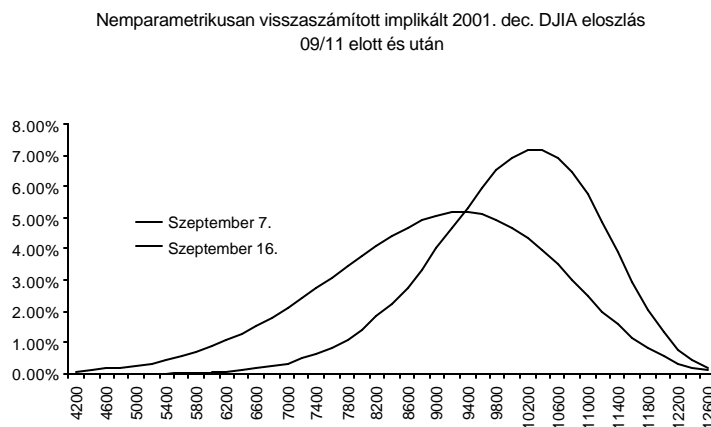
$$q(S_T) = e^{r(T-t)} \frac{c(X = S_T - \Delta S, T-t) - 2 \cdot c(X = S_T, T-t) + c(X = S_T + \Delta S, T-t)}{\Delta S}$$

formulát. Ez az ideálállapot azonban aligha teljesül. Még például a likvid CBOE piacon is napról napra kimarad egy-egy szükséges lépésköz, azaz kötési árfolyam a napi kereskedésből, másfelől az elérhető vételi és eladási árak is a nap más és más időszakából származnak. Meg kell jegyezni, hogy a számított hisztogram igen érzékeny a félreárazott (arbitrázs lehetőséget nyújtó) vagy a különböző napszakból származó jegyzésekre, és könnyen a negatív tartományba átvirgató, hektikus – hisztogramnak már alig nevezhető – ábrát kaphatunk. További probléma ezzel a direkt visszaszámítással, hogy az eloszlásszélekre nem ad becslést, hiszen a piacon

nem léteznek kötési árak a lehetséges lejáratkori árfolyam teljes (elvileg végtelen) horizontjára.

Emiatt tehát további, kvantitatív lépéseket kell tennünk. A félrejegyzések illetve idobeli aszinkronitás miatt *simítanunk* kell: vagy az opciós árakat magukat, vagy pedig a volatilitás-görbét. A 25. ábra készítésekor másodfokú polinóm-illesztést végeztem a 24. ábrán látható „volatilitás mosolya” görbére – amelynek majdnem lineáris jellege miatt – ezt a választást elfogadhatónak tartok. Ezt követően Black-Scholes képlettel az opciós értékeket suru lépésközönként visszaszámítva, és ezekből a fenti formulát alkalmazva, a visszanyert nemparaméteres eloszlás:

25. ábra



A szakirodalom egyébként a *harmadfokú spline interpolációt* tartja legjobb megoldásnak mind közvetlenül az árak, mind a volatilitás-görbe esetére (Shimko [1993] illetve Bahra [1997]). A probléma azonban továbbra is az, hogy az eloszlásvégekről nincs információnk.

2.2.2 Opcióárazási modell alternatív eloszlás feltételezése mellett¹³

Amennyiben feltételezünk egy parametrikus eloszlást az árak vagy hozamok eloszlására, ezáltal az eloszlásszél környéke is *egyértelműen* meghatározottá válik¹⁴. Leggyakrabban a kevert lognormális eloszlást feltételezik háttéreloszlásnak – a korábban már illusztrált rugalmasság, és a könnyű analitikus kezelhetőség miatt. A

¹³ Bahra [1997] alapján.

továbbiakban a legegyszerűbb, Bernoulli változó szerinti ugrásokkal leírható modellt ismertetem (további részletesebb tárgyalására a 3. fejezetben kerül sor). Az opcióárazási irodalom már viszonylag régóta ismeri a *jump-diffusion* modelleket, így ez a választás ugyancsak indokolható erről az oldalról. Hozzátehetjük még, hogy a normális eloszlás az összeadásra nézve stabil (azaz praktikusán az időhorizonton történő elmozdulás esetén eloszlását változatlanul megtartó, eloszlásában nem változó) eloszlások közül az egyetlen véges varianciájú ($\alpha=2$), így ez a választás még egy indokkal többet kap: maradhatunk a normalitás némileg tágított körén belül.

Az európai típusú opciók (ilyen pl. a S&P 500 opció is) ára a kockázatmentes valószínűségekkel számított várható kifizetésük kockázatmentes kamatlábbal diszkontált jele nértéke:

$$c(X, T-t) = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} q(S_T)(S_T - X) dS_T$$

$$p(X, T-t) = e^{-r(T-t)} \int_0^X q(S_T)(X - S_T) dS_T$$

illetve a kevert normális eloszlás választásának megfelelően a feltételezett RND alak:

$$q(S_T) = \sum_{i=1}^k [LN(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, S_T) I_i]$$

ahol k lognormális eloszlás összekeveréséből kapják meg a kevert eloszlást, λ az ugrásokat (keverést) meghatározó Bernoulli tag¹⁵ paramétere, a következő megkötésekkel: $0 \leq I_i \leq 1$ és $\sum_{i=1}^k I_i = 1$. Továbbá, a lognormális eloszlás

suruségfüggvénye:

$$LN(S_T) = \frac{1}{S_T \mathbf{b} \sqrt{2\mathbf{p}}} \exp\left(-(\ln S_T - \mathbf{a})^2 / 2\mathbf{b}^2\right)$$

$$\mathbf{a}_i = \ln S + (\mathbf{m}_i - 0,5\mathbf{s}_i^2)(T-t)$$

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{s}_i \sqrt{T-t}$$

¹⁴ Szokták ezt „risk reversal” eljárásnak is nevezni. *Risk reversal* árnak, vagy *ferdeségi prémiumnak* nevezik az azonos alaptermékre és lejáratra szóló, továbbá azonos deltával rendelkező eladási és vételi opciók piaci árának különbségét.

¹⁵ λ valószínűséggel 1-et, egyébként 0 értéket vesz fel.

Általában a gyakorlat megáll a 2 tagú keverésnél – de ugyancsak láthattuk az előző részben, hogy már két tagból is meglehetősen rugalmassággal ki lehet keverni vastagszélu, ferde, vagy akár *bimodális* eloszlásokat is. Ekkor a megfigyelt piaci opciókhoz az alábbi opcióárazást kell megfeleltetnünk:

$$c(X, T-t) = e^{-r(T-t)} \int_X^\infty [I \cdot LN(a_1, b_1, S_T) + (1-I) \cdot LN(a_2, b_2, S_T)] (S_T - X) dS_T$$

$$p(X, T-t) = e^{-r(T-t)} \int_0^X [I \cdot LN(a_1, b_1, S_T) + (1-I) \cdot LN(a_2, b_2, S_T)] (X - S_T) dS_T$$

Amennyiben n darab kötési árra van jegyzés a piacon, az alábbi optimalizációs feladatot kell megoldani (ahol \hat{c}, \hat{p} a megfigyelt piaci árakat jelenti):

$$\min_{a_1, a_2, b_1, b_2, I} \sum_{i=1}^n [c(X_i, T-t) - \hat{c}_i]^2 + \sum_{i=1}^n [p(X_i, T-t) - \hat{p}_i]^2 \quad b_1, b_2 > 0$$

illetőleg, ha feltesszük, hogy egyensúlyban az RND *várható értéke* megegyezik az elméleti határidős árral, a feladat kiegészíthető a

$$\dots + \left[I e^{a_1+0.5b_1^2} + (1-I) e^{a_2+0.5b_2^2} - e^{r(T-t)} S \right]^2$$

taggal. A numerikus optimalizáció során a kevert eloszlású opcióárazáshoz az alábbi képletek használhatók fel:

$$c(X, T-t) = e^{-r(T-t)} \left[I \left[e^{a_1+0.5b_1^2} N(d_1) - XN(d_2) \right] + (1-I) \left[e^{a_2+0.5b_2^2} N(d_3) - XN(d_4) \right] \right]$$

$$p(X, T-t) = e^{-r(T-t)} \left[I \left[e^{a_1+0.5b_1^2} N(-d_1) - XN(-d_2) \right] + (1-I) \left[e^{a_2+0.5b_2^2} N(-d_3) - XN(-d_4) \right] \right]$$

ahol

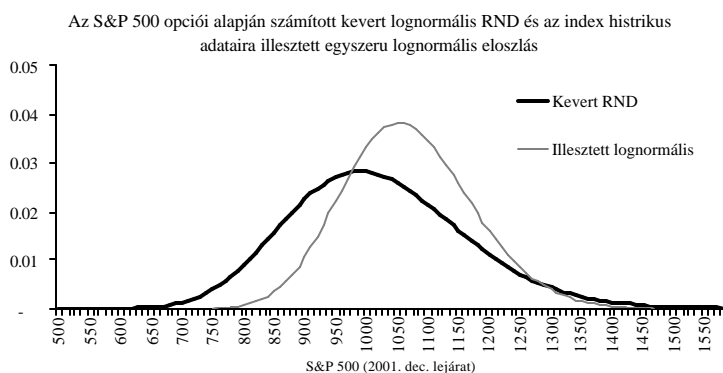
$$d_1 = \frac{-\ln(X) + a_1 + b_1^2}{b_1} \quad d_2 = d_1 - b_1$$

$$d_3 = \frac{-\ln(X) + a_2 + b_2^2}{b_2} \quad d_4 = d_3 - b_2$$

Az alábbi ábra az S&P 500 index kevert lognormális RND illesztését¹⁶ mutatja szeptember 17-i decemberre szóló call és put árakból számítva, kiegészítve az illesztett egyszerű lognormális eloszlással.

¹⁶ Az illesztést nem a forrásmunkában közölt eredeti legkisebb négyzetek függvényével, hanem a négyzetes hibatagok *opcióár nagyságával normált* értékei szerint végeztem, hogy a becslés érzékenyebb legyen a farokesemények szempontjából éppen meghatározó mélyen OTM és ITM árakra is.

26. ábra



Több irodalom is tárgyalja illetve összehasonlítja a különböző RND illesztési módszereket. *Cooper* [1999] vizsgálatai során például a volatilitási mosoly interpolációját jóval eredményesebbnek találta szimulációs tesztel, mint a kevert lognormális eloszlást. *Gemmil* és *Saflekos* [1999] alkalmazhatósági szempontból vizsgálta az RND-beclés hasznosságát, és azt találták, hogy önmagában az RND számítása *nem* igazán jelzi jól előre a jövőbeli piaci eseményeket, de *utólag* a piac reakcióját valóban jól tükrözik. Noha az első megállapítást is szem előtt kell tartanunk, én inkább a második vonatkozásra összpontosítok. A válsághelyzetek befektetői viselkedésének elemzésében miként alkalmazható az RND?

2.2.3 A kockázatkerülési együtttható beclésének elméleti háttere

A kockázatkerülési együtttható *nagyságára* és az averzió vagyoni helyzetre vonatkoztatott viszonyára az opciós piacon megfigyelhető árból következtethetünk. Ez utóbbi az ok, ami miatt ezt a módszert tárgyalom, hiszen az averzió nagyságára, különösen pedig az időbeli változására – bizonyos megkötések mellett – akár csak a kockázati spread-ek vagy a visszaszámított volatilitás változásából is következtethetünk; a vagyoni helyzethez viszonyított alakjára azonban nem. A stabilitási riportok sokszor a spread-ek változását úgy is értelmezik mint a globális kockázatkerülés növekedését (elvileg előbb persze ki kellene szurni a spread változásából a mögöttes kockázat változásából fakadó hányadot).

Az opciókból származtatott averzió-beclés hátterében az az észrevétel áll, amely szerint az alaptermék *kockázatsemleges* és *tapasztalati* eloszlásának viszonya

illetve az aggregált *abszolút kockázatkerülési együttható* között *elméleti* összefüggés áll fenn (Ait-Sahalia és Lo [1997] pp. 21, illetve Coutant. [1999] pp. 5). Ahhoz, hogy ezt az összefüggést feltárhassuk, röviden át kell tekintenünk az eszközárzási elmélet alapjait¹⁷, hiszen az összefüggés egyúttal az *abszolút* illetve a *relatív* árazási modellek találkozási pontjában is nyugszik. Az *abszolút* árazási modellek a befektetési eszközök árát a jelenbeli és jövőbeni *fogyasztás hasznosságából* vezetik le, és innen indulnak ki az általános egyensúlyi modellek is. Ezzel szemben a *relatív* modellek „valamilyen más eszközhöz képest” áraznak, feltételezik, hogy a piacon a beárazandó eszközön kívül más eszközök ára ismert. Ilyen modell tipikusan a *Black-Scholes* modell is, amely más eszköz árát elfogadva, nem elsősorban a fundamentális faktorokra koncentrálva vezeti le az opció elméleti árát. Persze kristálytiszta formában ritkán találkozunk az egyik vagy másik fajta modellel: a CAPM például eredetében egy abszolút árazási modell, gyakorlati megjelenésében mégis sokkal inkább relatív formát ölt.

Az averzió levezetésének logikája aritmetikai szempontból egyszerűnek mondható. Ki kell viszont emelnünk, hogy a modell mögött szigorú feltételezés húzódik meg: a *piac teljessége*. Erre a feltételezésre a későbbiekben még visszatérünk.

A fogyasztás-alapú árazás alapgondolata a következő: jelenbeli és jövőbeni fogyasztásom együttes hasznosságát szeretném maximalizálni¹⁸. Eközben a jelen és a jövő között javakat tudok (befektetés vagy hitel formájában) átcsoportosítani. Az ehhez felhasznált tokepiaci eszköz ára p_t , jövőbeli x_{t+1} kifizetése pedig a jövőbeli árban és az eszköz által fizetett d_t jövedelemben testesül meg:

$$x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$$

A döntéshozó vagyonát a jelenben és a jövőben egyaránt fogyasztásra fordíthatja – az alapkérdés ezúttal nem két különböző kockázat közötti, hanem a jelenbeli és jövőbeli fogyasztás közötti allokáció. A kérdés nehézsége, hogy a fogyasztás t időpontbeli határhasznossága a jelenbeli és jövőbeli fogyasztásnak egyaránt függvénye. A további elemzések technikai kivitelezhetősége érdekében általában feltételezik a hasznosságfüggvény időbeli szeparálhatóságát (Gollier [2001]), mely

¹⁷ Az eszközárzási témáról széleskörű részletes tárgyalás olvasható például: Cochrane [2001], Huang, Litzenberger [1988], illetve Bhattacharya, Constantinides szerk. [1989]

¹⁸ Az egyszerűség kedvéért 2 periódusú modellt tárgyalok, a dolgozatomban szempontjából a gondolatmenet logikája lényeges.

szerint létezik $n+1$ olyan u_t ($t=0,1,...,n$) függvény, hogy $U(c_0, c_1, ..., c_n) = \sum_{t=0}^n u_t(c_t)$. Ez

tulajdonképpen egy függetlenségi kitétel: $t=0$ idoponttól t_i idopontig a fogyasztások sorrendezése független attól, hogy mi is lesz a fogyasztás t_i+1 idopontot követően. A jelenbeli és a jövőbeli fogyasztás hasznosságát a döntéshozó a \mathbf{b} „szubjektív diszkont faktoral” váltja át, ez fejezi ki a fogyasztó türelmetlenségét.

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \mathbf{b} E_t(u(c_{t+1}))$$

A klasszikus fogyasztási alapú eszközárzási probléma tehát a következő: ha e jelenti az eredeti fogyasztási szintet (tehát azt, amit a döntéshozó akkor fogyasztana, ha nem állna módjában kockázatos eszközbe befektetni) és \mathbf{x} az az összeg, amelyet a befektető végül befektetésre szán, az optimalizációs feladat az alábbi formában írható fel:

$$\max_{\mathbf{x}} u(c_t) + E_t(\mathbf{b} \cdot u(c_{t+1})) \quad \text{a}$$

$$c_t = e_t - p_t \mathbf{x}$$

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \mathbf{x}$$

korlátozó feltételek mellett. A korlátozó feltételek behelyettesítésével és a maximalizálandó függvény allokáció szerinti deriváltját zéróval egyenlővé téve jutunk az optimális fogyasztás-befektetés *elsorendu feltételéhez*:

$$-p_t u'(c_t) + x_{t+1} E_t(\mathbf{b} u'(c_{t+1})) = 0,$$

és így kapjuk a hasznosságon alapuló eszközárzási formulát:

$$p_t = E_t \left[\mathbf{b} \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1} \right]$$

Az eszközárzási alapképlet rövidebb alakban a következőképpen írható fel:

$$p_t = E(m_{t+1} x_{t+1}), \text{ ahol } m_{t+1} = \mathbf{b} \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \text{ a helyettesítési határráta (MRS), más néven}$$

sztochasztikus diszkontfaktor (SDF) avagy *árazó mag*. Ez az általános árazási formula önmagában még nem feltételez *sem* teljes piacot, *sem* 2 periódusú modellt, *sem* általános egyensúlyt, *sem* pedig reprezentatív szereplot.

A következő lépésben tekintsük, miként alkalmazható ugyanez a logika az elemi feltételes követelésekre, avagy *Arrow-Debreu* termékekre. Ezek az elemi függő követelések egységnyi összeget fizetnek egy adott s állapotban, és 0-t egyébként.

Fejezzük ki $pc(s)$ -vel egy ilyen eszköz árát. Legyen egy származtatott eszköz kifizetése $x(s)$ s állapotban. Könnyű belátni, hogy ekkor:

$$p(x) = \sum_s pc(s)x(s)$$

Ekvivalens átalakítást végezve:

$$p(x) = \sum_s \mathbf{p}(s) \frac{pc(s)}{\mathbf{p}(s)} x(s)$$

ahol $\mathbf{p}(s)$ jelöli s esemény bekövetkeztének a valószínűségét. Definíáljuk a diszkontfaktort az elemi derivatív termék és az állapot-valószínűség hányadosaként:

$$m(s) = \frac{pc(s)}{\mathbf{p}(s)}, \text{ és ezt felhasználva az opció ára felírható}$$

$$p(x) = \sum_s \mathbf{p}(s) m(s) x(s) = E(mx) \text{ alakban.}$$

Bizonyítható, hogy *teljes piacon* az m sztochasztikus diszkontfaktor létezik, és az nem más, mint elemi derivatív-árak és valószínűségek hányadosa (Cochrane [2001]). Ha bevezetjük a kockázat-semleges valószínűséget:

$$\text{def } \mathbf{p}^* \equiv R_f m(s) \mathbf{p}(s) = R_f pc(s),$$

ahol

$$R_f \equiv 1 / \sum pc(s) = 1 / E(m)$$

akkor egy származtatott termék ára kifejezhető:

$$p(x) = \sum_s pc(s)x(s) = \frac{1}{R_f} \sum \mathbf{p}^*(s)x(s) = \frac{E^*(x)}{R_f} \text{ alakban is, ahol } E^* \text{ a}$$

kockázatsemleges valószínűség mellett mért várható értéket jelenti, szemben a valós valószínűségekkel. A kockázatsemleges esetben úgy tekinthetünk a piaci befektetésekre, mint kockázatsemleges szereplőkre, de nem a valós, hanem \mathbf{p}^* valószínűségek mellett. A mögöttes elmélet igen mély: a kockázatkerülés azt jelenti, hogy a befektető viszonylag nagyobb figyelmet fordít a kedvezőtlen eseményekre azok valószínűségéhez képest. Képet kaphatunk a befektetők kockázatsemleges valószínűségeloszlásáról, hogy ha megfigyeljük például, hogy a befektető valamely kedvezőtlen eseményhez nagy \mathbf{p}^* valószínűséget társít. A mértékváltást a korábban

$$\text{felírt } \mathbf{p}^*(s) = \frac{m(s)}{E(m)} \mathbf{p}(s) \text{ összefüggés adja.}$$

Térjünk azonban vissza a befektetés és fogyasztás közötti döntés problémájához: jelölje y a kezdeti jóléti szintet, és $y(s)$ a jövőbeli, állapot-függő jövedelmet. A befektető minden lehetséges jövőbeli állapothoz vásárolhat függő követelést. A befektetési döntés tehát ugyanaz, mint a korábban felírt esetben volt:

$$\max_{c, c(s)} u(c) + \sum_s \mathbf{bp}(s) u[c(s)] \quad \text{a}$$

$$c + \sum_s p c(s) = y + \sum_s p c(s) y(s)$$

korlátozó feltételek mellett. A költségvetési korlátként értelmezhető korlátozó feltételek szerint a fogyasztás értéke a vagyon nagyságával egyenlő. A korlátozó feltételeket λ Lagrange-multiplikátorral visszük a célfüggvénybe¹⁹. Az optimális allokáció első rendű feltételei a jelenbeli c illetve a jövőbeli $c(s)$ fogyasztás szerinti deriváltak zéróra való megoldásából adódnak:

$$u'(c) = 1$$

$$\mathbf{bp}(s) u'(c(s)) = 1 \cdot p c(s)$$

A két feltételből adódik, hogy

$$p c(s) = \mathbf{bp}(s) \frac{u'(c(s))}{u'(c)} \quad \text{avagy}$$

$$m(s) = \frac{p c(s)}{p(s)} = \mathbf{b} \frac{u'(c(s))}{u'(c)}$$

A befektetési döntés első rendű feltételéből adódik, hogy a különböző állapotok közötti helyettesítési határráta:

$$\frac{m(s_1)}{m(s_2)} = \frac{u'(c(s_1))}{u'(c(s_2))}$$

Ez a hányados adja meg azt a rátát, amely mellett a befektető hajlandó feláldozni a 2. állapot melletti fogyasztását az 1. állapotbeliért feltételes követelések eladásán és vételén keresztül. Az optimumot akkor érjük el, amikor az árak hányadosa megegyezik az MRS helyettesítési határrátával. Az MRS tehát mind az időpontok, mind az állapotok közötti döntések során értelmezhető fogalom. *Cochrane* [2001] összefoglalja, hogy a piac különböző jellemzői és a diszkontfaktor között milyen összefüggések húzódnak meg:

- érvényes az egy ár törvénye: ekkor és csak ekkor létezik diszkont faktor,
- arbitrázsmentesség: ekkor és csak ekkor létezik pozitív diszkont faktor,

- teljes piac: a diszkontfaktor egyértelműen meghatározott, ha viszont nem teljes a piac, végtelen számú diszkontfaktor létezik, azaz nem egyértelműen meghatározott. Emiatt tehát a *piac teljessége* a továbbiakban leírt modell *alapfeltétele*.

A piac teljessége az *Ait-Sahalia*-féle modell kulcsfeltétele a diszkontfaktor egyértelműségei miatt, továbbá azért, mert teljes piacok esetén a heterogén szereplőket egyetlen *reprezentatív* fogyasztóval helyettesíthetjük oly módon, hogy az egyensúlyi árak és az aggregált fogyasztás változatlanok maradnak (*Bhattacharya, Constantinides* [1989]). Ekkor tehát tekinthetünk reprezentatív szereplőt U hasznossági függvénnyel, így a visszaszámított averziót az aggregált kockázatkerülést megfelelően tükröző indikátornak fogadhatjuk el.

Ait-Sahalia gondolatmenete az opciókra felírható abszolút és relatív kockázatsemleges árazás összevetésén alapszik:

$$p_t = E(m_T x_T) = \int_0^\infty x(c_T) \mathbf{b} \frac{u'(c_T)}{u'(c_t)} f(c_T) dc_T$$

$$p_t = e^{-r_f(T-t)} E^*(x_T) = e^{-r_f(T-t)} \int_0^\infty x(c_T) f^*(c_T) dc_T$$

A $\mathbf{p}^*(s) = \frac{m(s)}{E(m)} \mathbf{p}(s)$ összefüggést felhasználva képezhetjük a két mérték hányadosát:

$$V(S_T) = \frac{\mathbf{p}^*(S_T)}{\mathbf{p}(S_T)} = \frac{m_T}{E(m)} = \frac{1}{E(m)} \frac{u'(S_T)}{u'(S_t)}$$

az abszolút kockázatkerülési averzió pedig a V és annak az S_T szerinti deriváltja hányadosaként adódik:

$$-\frac{V'(S_T)}{V(S_T)} = -\frac{u''(S_T)}{u'(S_t)} \cdot \frac{u'(S_t)}{u'(S_T)} = -\frac{u''(S_T)}{u'(S_T)} = A(S_T)$$

Az averzió tehát a valós és kockázatsemleges suruségfüggvényekből a következőképpen becsülhető:

$$A(S_T) = -\frac{V'(S_T)}{V(S_T)} = \left(\frac{\mathbf{p}^*(S_T)}{\mathbf{p}(S_T)} \right)' \cdot \left(\frac{\mathbf{p}(S_T)}{\mathbf{p}^*(S_T)} \right) = \frac{\mathbf{p}'^*(S_T) \mathbf{p}(S_T) - \mathbf{p}^*(S_T) \mathbf{p}'(S_T)}{\mathbf{p}^2(S_T)} \cdot \frac{\mathbf{p}(S_T)}{\mathbf{p}^*(S_T)}$$

¹⁹ $u(c) + \sum_s \mathbf{b} \mathbf{p}(s) u[c(s)] - I \left\{ c + \sum_s p c(s) c(s) - y - \sum_s p c(s) y(s) \right\}$

$$A(S_T) = \frac{p^*(S_T)}{p(S_T)} - \frac{p'(S_T)}{p(S_T)}$$

Mielott továbblépünk, még egy kérdésnél érdemes megállnunk. Mit jelent az, hogy feltettük a hasznosságfüggvények idobeli szeparálhatóságát? Vane értelme egyáltalán emellett idoben változó averzióról beszélni? Véleményem szerint van, a következő miatt: elméletileg feltételezhetem, hogy pl. július 1. és december 1. (rendre: mérési idopont és opció lejárat idopont) között az averziós függvény változatlan. Ugyanezt feltételezhetem pl. július 15. és december 1. közötti viszonylatban is. Ugyanakkor a két mérés között érkezhets új információ a piacra, a két mérési időszakot nem köti össze elméleti kapcsolat.

A fenti gondolatok tükrében ha a szubjektív (tapasztalati) eloszlást változatlanak *feltételezzük*, az RND-k változásából az *averzió-változására* következtethetünk a kötési árfolyamok viszonylatában. (Azaz az $X < S_0$ szakaszon vagyonsökkenést, az $X > S_0$ szakaszon vagyonnövekedést feltételezhetünk), és

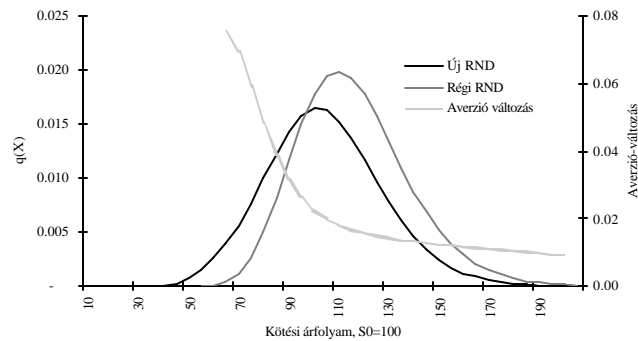
$$\Delta A = -\left(\frac{p^{*'}(X)}{p^*(X)}\right)_t + \left(\frac{p^{*'}(X)}{p^*(X)}\right)_{t-1}.$$

Jelen esetben a modellezett RND mind

kedvezotlenebb jövőbeli várható értéket, mind magasabb volatilitást feltételez:

27. ábra

Az averzió-változás közelítése



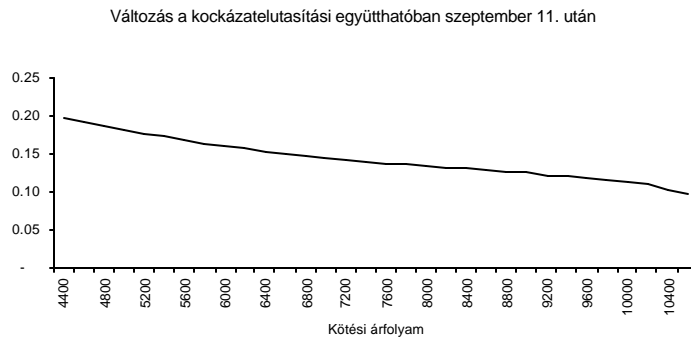
Jackwerth [2000] elemzése során az RND-t az implikált volatilitás-görbe görbületének minimalizálásával határozta meg, majd az így nyert volatilitásokból Black-Scholes formulával visszszámított opciós árakból kapott implikált RND-t. A *szubjektív* valószínűséget 4 éves historikus adatsorok alapján, *Gauss kernel* (dolgozatomban lásd: 3. fejezet) nemparaméteres simítással nyerte. Tapasztalatai

nem egyértelműek: noha *általában* pozitív, és a vagyon szerint csökkenő²⁰ kockázati averziót kapott, az 1987-es szakadás környékére ellentmondó averziókat tudott számítani, mely eredményt némiképp a becslések és adatok megbízhatatlanságának tulajdonít.

Coutant [1999] tapasztalatai megnyugtatóbbak: általánosan „szépen” viselkedő, DARA jellegű averziót talált. Az RND meghatározásában a kevert normálnál összetettebb parametrikus polinomiális módszerrel dolgozott. *Engle* és *Rosenberg* [1997] a GARCH jeleget vitték be *CRRA*-t feltételező elemzésükbe, és tapasztalatuk szerint a tapasztalati relatív averzió lényegesen magasabb, mint a Black-Scholes-i környezetben fennálló elméleti egyensúlyi relatív averzió. *Ait-Sahalia* és *Lo* empirikus tapasztalatai alátámasztják a *konstans relatív* és a *csökkenő abszolút* kockázatkerülés hipotézisét.

A Dow Jones szeptember 11. előtti és utáni (17-i) nem paraméteres RND eloszlás-összevetéséből adódott az alábbi ábra. A szubjektív eloszlást változatlanak véve, csak az RND változását tekintettem, és jól viselkedő, közel DARA tulajdonságot mutató averziót találtam (az azonnali DJ index értéke 8921).

28. ábra



Ez persze csak egy kiragadott periódus – jóval mélyebb és átfogóbb elemzést kell készíteni válság-időszakokra, egyúttal azt is megmutatva, hogy az averzió tényleg csak a válság illetve erős negatív hír hatására változik, nyugodtabb periódusokban viszonylag stabilnak tekinthető. Az alábbi rövid esettanulmányban az 1998-as őszi válság néhány jeles napját dolgoztam fel.

²⁰ Ezekben az elemzésekben a vagyon, vagy jóléti helyzet nagyságát az ATM-hez képesti kötési árak jelzik. Az ATM-tól lefelé eső régiót, minthogy az alaptermék értéke esik, a jólét romlásaként, a fölötté lévő régiót a jólét javulásaként értelmezik.

2.2.4 Az 1998-as válság és az opciós piacok

Az 1998-as év a pénzügyi válság-helyzetek elemzése szempontjából kiváló elemzési időszak. Az S&P 500-as indexre szóló opciókat vizsgáltam meg 4 időpontra:

- 1998. május mint az 1997-es válság utáni, de még az orosz válság kirobbanása előtti időszak (feltöltve negatív emlékekkel, de még az orosz válság kirobbanása előtt);
- 1998. július 14.: az IMF jóváhagyja Oroszország hitelkeretét;
- 1998. szeptember: túl az LTCM veszteségeinek július végi nyilvánosságra kerülése és az augusztus 31-i Dow Jones zuhanás után;
- 1998. december, amikor a piac talán már „magára talált”.

Az opciók elemzésekor mindig a következő, megközelítőleg negyedéves periódusra szóló lejáratot vizsgáltam. Az RND-k becsléséhez a 2 tagból kevert *lognormális eloszlás*²¹ alkalmaztam, mind a vételi mind az eladási opciós árak alapján²². A visszszámított kevert eloszlásból lezűrhető statisztikák:

4. táblázat

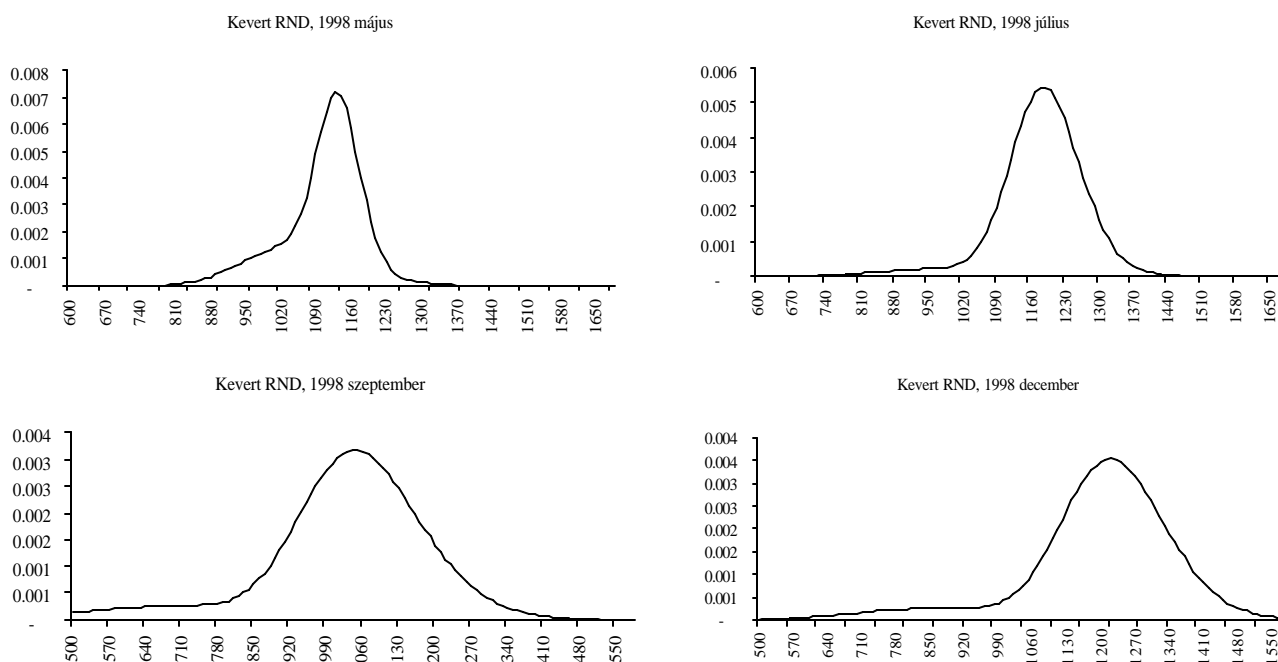
Beépített várakozás	Május	Július	Szeptember	December
Várható hozam	6%	3%	-3%	4%
Várható volatilitás	16%	16%	25%	20%

A visszszámított eloszlás-alakzatok az alábbi, minden esetben „pesszimista” formát mutatták:

²¹ Megjegyzem, e parametrikus eloszlás választása során a „legegyszerűbb utat” választottam, hiszen a szükséges 5 paraméter ismeretében a teljes eloszlás ismertté válik. A hivatkozott *Ait-Sahalia*, *Coutant* és *Jackwerth* dolgozatok nem-paraméteres megoldással (kernel-regresszió, Hermite-polinóm) dolgoznak, amelyekkel nyilvánvalóan pontosabb eredményre jutnak.

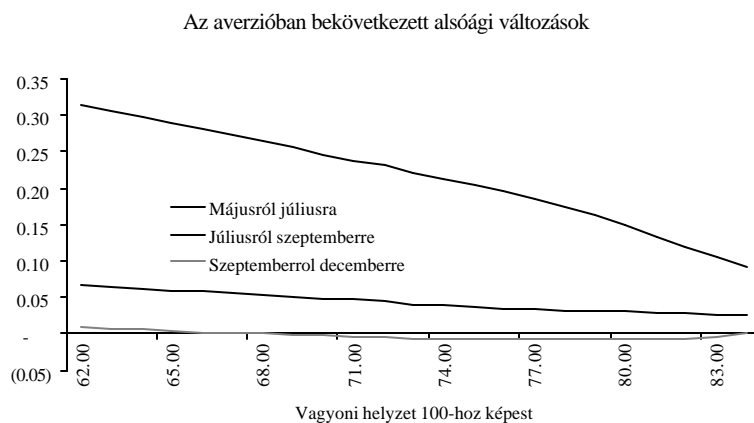
²² Opciós árjegyzékek forrása. The Wall Street Journal 1998-as kiadásai.

29. ábra



Végül az averzió-változások a kötési árfolyamok függvényében:

30. ábra



Elmondható mindezek alapján, hogy a teljes 1998-as év vizsgált szakaszán beépített várakozások voltak a piac lehetséges további zuhanására. Ugyanakkor ez az extrém eseménnyel szembeni félelem mindig egy kisebb súlyú taggal volt jellemezhető, ám szeptemberben, a legpesszimistább időszakban az opciós piaci várakozás teljes várható értéke negatívan tekintett a következő negyedévre. Az averzió júliusra

erosödött a leginkább, és decemberre igen gyenge enyhülést lehetett csak tapasztalni.

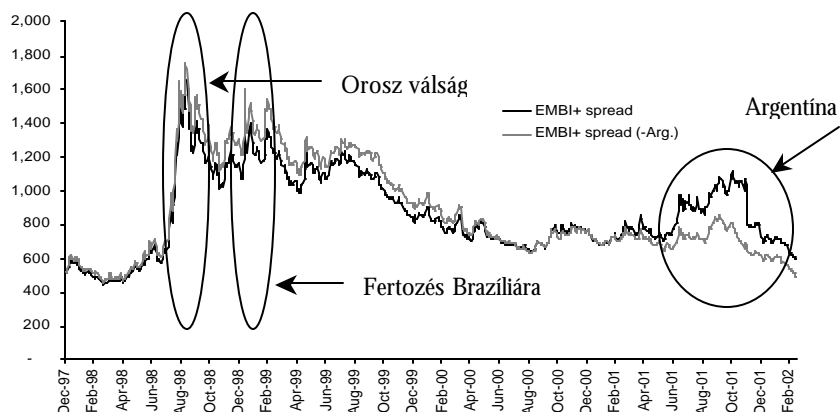
Sajnos az opciós piac hazánk esetében nem szolgáltat hasonlóan mélyen elemezhető adatokat – de az amerikai opciós piac önmagában is jellemezheti a globális befektetők összpiaci magatartását, és a csökkenő kockázatvállalási hajlandóság önmagában is magyarázhatja általános kockázatos szektorbeli allokáció-csökkentést. Az averzió becslésére más megközelítések is alkalmazhatók, például a tapasztalati globális eszközallokációs statisztikákat tekintve (országokénti teljes részvénytőke kapitalizáció, stb.), a piaci faktorok ismeretében megkísérélhető egy globális averzió visszaszámítása²³. A hivatkozott szerzők hasonlóképpen be tudják mutatni az averzió válság közbeni és azt követő időszakban történő megugrását, de az opciós piaci eljárás előnye, hogy azzal (a különböző kötési árfolyamok ismeretében) magára a DARA jellegre is rámutathatunk.

A feltörekvő piacokra specifikusan az adósságszétterjedés változása nyújthat támpontot. *Eichengreen et al.* [2000] a biztonságba menekülés kapcsán befektetők a feltörekvő piaci adósság papírokhoz való viszonyát vizsgálták, és ehhez az adósságszétterjedést, a lejáratok struktúráját és a válság előtti és utáni kibocsátási mennyiségeket elemezték. Fő megállapításaik szerint a piaci hangulat negatívvá válása során a kötvénypiacot érő legfontosabb hatások: *elsősorban* a legjelentősebb hatások a gőc-pontot érintik, és az átterjedési hatások relatíve alacsonyabbak – azaz van fundamentális megkülönböztetés az országok között²⁴, ezt mind a kibocsátott mennyiségi adatok, mind a regionális szétterjedés változásai alátámasztják. *Másrészt* a lejáratok szerkezetét sokkal kevésbé érinti a hangulat, mint a felár vagy a kibocsátási mennyiséget. *Harmadrészt* a válságok után a kibocsátható adósság mennyisége visszaesik, azaz válság után nem változik lényegesen a kibocsátható adósság lejáratok struktúrája, de a kibocsátható mennyiség zuhan és a felár jelentősen nő. Az alábbi ábrán a feltörekvő piacok adósságpapírjainak amerikai államkötvények hozamához viszonyított kockázati felár indexét láthatjuk:

²³ lásd pl.: *Kritzman, Lowry, Dr. Vanroyen* [2000?]

²⁴ ...amit a sok tökéletlen informáltságot tárgyaló cikk után „jó olvasni”. Úgy tűnik, az argentin válsággal kapcsolatos tapasztalatok is részben erre engednek következtetni.

31. ábra



Az opciós piacok mellett, illetve hiányában a kötvénypiaci felárak hirtelen változásai is mutatják a befektetők kockázathoz való viszonyának változását. A feltörekvő országok adósságpapírjainak alakulásáról a 31. ábrán látható EMBI index amerikai állampapírokhoz viszonyított felára szolgál jó közelítésként. Az ábra az átfogó EMBI+ index, illetve az argentin hatástól mentesített EMBI index felárát ábrázolja. A különbség 2001-re szembevetendő: volt ugyan egy átfogó felárnövekedés (némiképp a szeptemberi események által is indokolhatóan), de a kiigazított spread és az Argentínát még tartalmazó spread erosen különvált az előző év végére, jelezve, hogy ezúttal nem tapasztalhattunk átfogó fertőzést a kötvénypiacokon sem.

A 31. ábrán látható, hogy a felár hirtelen szökik fel, és viszonylag lassan cseng le. Ez jelentheti a kockázatkerülési attitűd hirtelen emelkedését és lassú lecsengését, amely egybevág az opcióknál feltárt jelenséggel: a hirtelen megugrott averzió decemberre az ugrás mértékéhez viszonyítva lényegesen kevésbé csökkent. Persze a felárak vizsgálata során elvileg meg kell szűni a felarat a megnőtt piaci és likviditási kockázat hatásától.

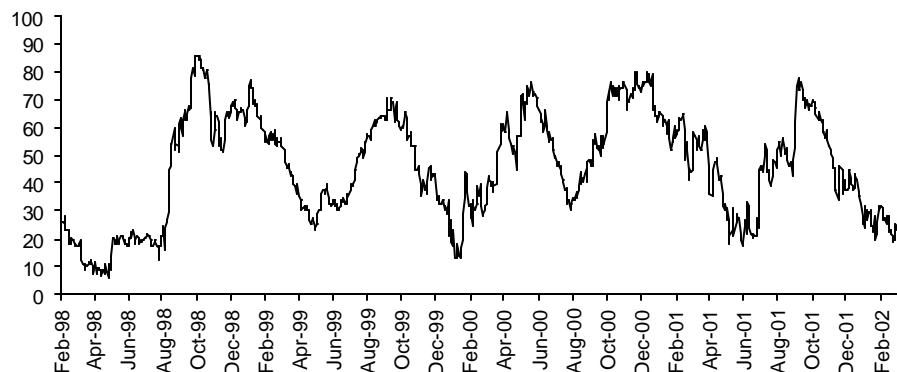
Az argentin fertőzés alacsony mértéke kapcsán feltételezhető, hogy a kockázatkerülő befektetők már likvidálták argentin pozícióikat, amikor észlelték az egyre erősödő kockázatot: a spread-ek az 1998-as jelenséggel szemben viszonylag folyamatosan emelkedtek. A viszonylag alacsonyabb fokú kockázatkerülésben az is szerepet játszhatott, hogy a veszteségek az orosz válsághoz képest kevésbé koncentráltak, inkább széles körben szétterítettek a befektetők körében, így a veszteségek kevésbé csökkentették az egyéni befektetők vagyonát.

A kockázatkerülés átfogó mérésére a J.P. Morgan Chase publikál egy úgynevezett *Liquidity and Credit Premia Index*-et (LCPI) indexet, mely egyszerre

mérlikviditási (amerikai *on-the-run* és *off-the-run* állampapírok hozamkülönbsége) illetve hitelkockázati (amerikai *high yield* hozamfelár, valamint feltörekvő piaci hozamfelár) továbbá visszaszámított volatilitás komponensekből épül fel. Az index magas, 100-hoz közeli értékei természetesen a nagyobb arányú kockázatkerülésről tanúskodnak.

32. ábra

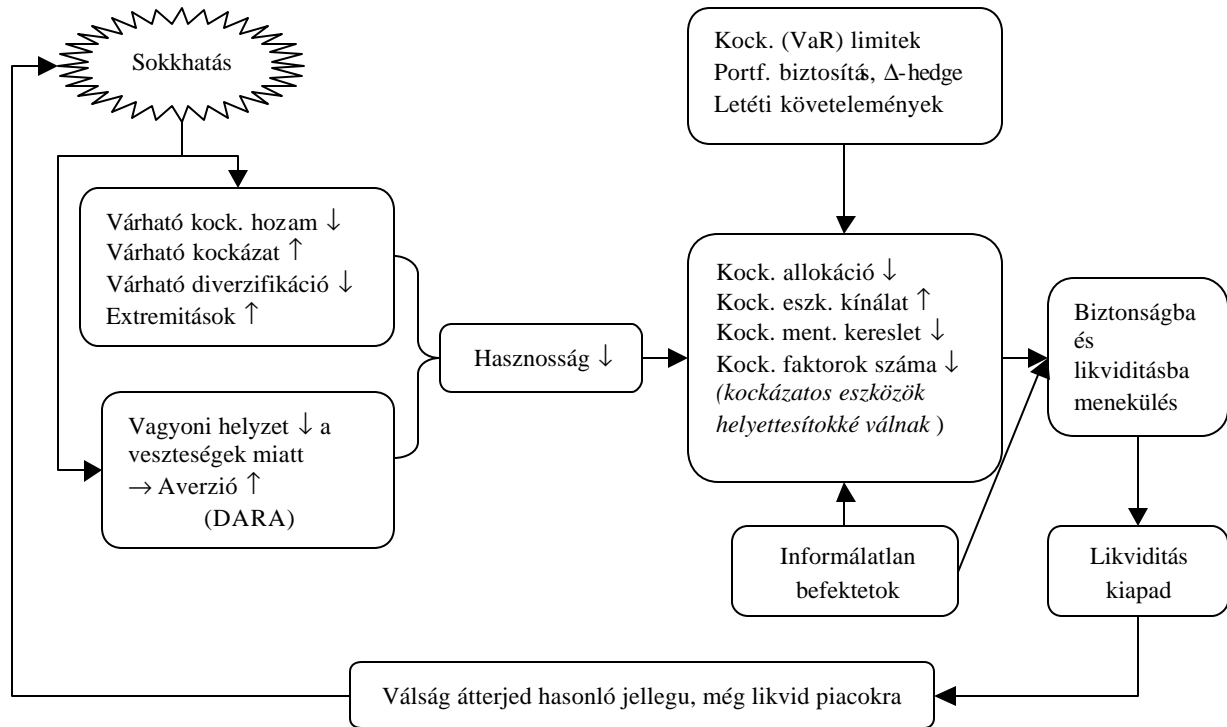
LCPI index



Végezetül az 1. és 2. fejezet zárásaként a 33. ábrán kerülnek összefoglalásra a sokkhatás súlyosbodására és áttérjedésére feltárt és áttekintett magyarázatok, oksági kapcsolatok²⁵, amely akár az 1. fejezetben hivatkozott BIS tanulmány ábrájának kiterjesztéseként is felfogható.

²⁵ Hasonlóság fedezhető fel ezen ábra és a bankválságok elmélyülésének egy lehetséges magyarázataként számotartott, Király [1995] tanulmányban tárgyalt „Fisherspirál” üzenete között. Mindkét elemzés egy „ördögi kört” mutat be, és egyik tanulmány sem keres fundamentális magyarázatot a válságot kirobbantó szikra okára.

33. ábra



3 Módszertani eszközök a kockázat mérésében

Dolgozatom jelen fejezetében az empirikus méréssel, a kockázatbecslés módszertani eszközeivel foglalkozom. Talán ez a terület, amely leginkább interdiszciplinárisává vált az elmúlt években a kockázatkezelés tág körén belül. A módszerek, az eszköztár rendkívül tág – az áttekintésben ezért egyszerre próbáltam az alkalmazói vonatkozásra koncentrálni, ugyanakkor bevonni egészen frissen publikált eljárásokat is. Minden ismertetett módszert kipróbáltam valós idosorokon, így alkalmazói, elemzői oldalról tudok kritikai észrevételeket is tenni. Sok módszer helyet kap már ma is a banki kockázatkezelési gyakorlatban, de vannak olyan eljárások is, amelyek valószínűleg hosszú távon is csak a kutatói munkában kapnak lényegi szerepet. A „kockázatomérés” alatt ezúttal a piaci kockázati faktorok terjedelmének és együttmozgásának a mérését értem, így nem foglalkozok például azzal, hogy különböző befektetési pozíciókat miként lehet ezekhez a faktorokhoz illeszteni, aggregálni vagy szétbontani (angolul: *map*-elni).

A piaci kockázatomérés elmúlt évtizedben legdivatosabb eszköze a kockázatosított érték²⁶ lett (*Value at Risk*, *VaR*), melyről már a korábbi fejezetekben is szó esett, legalábbis említés szintjén. A *VaR* fogalma úgy definiálható, mint az a pénzösszegben vagy hozamkategóriában kifejezett veszteség, amelynél a portfólió egy előre meghatározott valószínűségi szinten és egy előre meghatározott időtávon várhatóan nem szenved el nagyobb veszteséget:

$$VaR_a(V) = -\inf \left[v \mid F_V(v) \geq 1 - a \right]$$

ahol a jelenti a becslés konfidenciaszintjét, v fejezi ki a *VaR* értékét mint a t időszak a valószínűség szerint várható legkedvezotlenebb értékváltozást, és F_V a portfóliónk t időintervallumra eső értékváltozásának az eloszlása. Statisztikai szempontból mindössze egy eloszlásfüggvény inverzének, tehát $F_V^{-1}(a)$ értékének meghatározásáról van szó.

Az elméleti irodalomban az utóbbi időben divatossá vált az ún. *Expected Shortfall* (azaz a *VaR* mint küszöbérték alatti várható további veszteség) fogalma mint ún. koherens kockázati mérték (*Artzner et al.* [1998]):

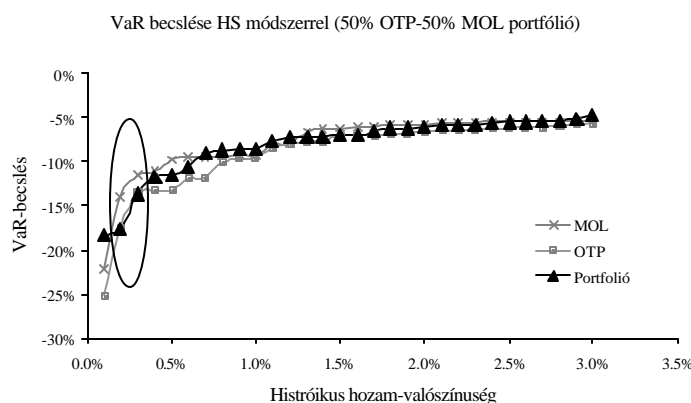
²⁶ magyar nyelven lásd: *Jorion* [1999] illetve *Király* [1998]

$$ES_a(V) = -E[v | v \leq -VaR_a(V)]$$

A VaR-ral szemben támasztott gyakori kritika, hogy nem veszi figyelembe, mi történik a küszöbérték alatt, azaz nem tesz különbséget aközött, hogy pl. 1% -kal vagy 45% -kal következik be a jelzett VaR szintnél magasabb veszteség. Az *ES* erre a hiányosságra lehet megoldás.

A VaR bírálatok további észrevétel (az egyik, amely miatt nem tekinthető koherens mértéknek), hogy az elliptikus parametrikus esetet leszámítva nem teljesül a „szubadditivitás” kritériuma, azaz 2 pozíció külön számított VaR értékének az összege lehet kisebb, mint a 2 pozíció együttes VaR értéke. A *Markowitz-i* elméletben kulcsfontosságú hogy a diverzifikáció által a 2 pozíció együttes szórása nem nagyobb, mint a 2 pozíció együttes szórásának az összege (azaz az egyenlőség tökéletes függőség esetén áll csak fenn). Ha VaR-t szórásokból és korrelációkból becsüljük, természetesen ott sem állhat fenn ilyen szituáció, de a legegyszerűbb példával élve: historikus szimuláció alkalmazásakor mutatható ilyen eset²⁷:

34. ábra



Dolgozatom jelen fejezetében áttekintem a különböző, kockázatelemzések során alkalmazott eloszlás-modelleket. Az alternatív eloszlások összehasonlításakor és tesztelésekor általában két módszert fogok alkalmazni: (1) khi-négyzetes *illeszkedés-vizsgálatot* (a normalitás esetén kiegészítve *Jarque-Bera* teszttel) és (2) *VaR*-utótesztelést. Ez esetben tehát a VaR-t részben mint tesztelési eszközt

²⁷ A szakirodalmak ennél sokkal bonyolultabb és lehetetlenebb példákkal illusztrálják ugyanezt a problémát.

alkalmazom azzal a gyakorlati vonatkozással, hogy a kockázat-becslés során az eloszlásmodell kiválasztása kritikus lehet.

A VaR-modell tesztelése gyakorlati relevanciája miatt természetesen alapvető és döntő fontosságú. Kérdés, hogy ha például 99 százalékos megbízhatósággal jeleztünk VaR-értékeket, akkor például 100 nap alatt két „tévedés” jelenti-e azt, hogy a modellünk hibás. A modellek megbízhatóságának tesztelésére egy valószínűségi hányados módszer (*likelihood ratio*–*LR*) alkalmazható (Kupiec [1995]). Tegyük fel, hogy az utótesztelést T napon keresztül végezzük, és azt tapasztaljuk, hogy ebből N alkalommal szenvedett el portfóliónk a jelzett VaR-értéknél nagyobb veszteséget. Amennyiben VaR-számításainkat $c = 1 - p$ konfidenciaszinten végezzük, megfogalmazható a $H_0: N/T = p$ és $H_1: N/T \neq p$ hipotézis, N binomiális eloszlását feltételezve. Ekkor az LR próbastatisztika:

$$LR = 2 \left[\ln \left(\left(\frac{N}{T} \right)^N \left(1 - \frac{N}{T} \right)^{T-N} \right) - \ln \left(p^N (1-p)^{T-N} \right) \right] \sim \chi^2_1$$

3.1 Feltétel nélküli statikus eloszlások alkalmazása

Az eloszlások terjedelmének mérése – amelyre tipikusan a *volatilitás* kifejezéssel utalhatunk – a kockázatmérés, kockázatelorejelzés kiindulópontja. A visszaszámított volatilitás után a tapasztalati, statisztikai módszereket tekintem át. Az első (visszaszámított volatilitás) módszert tekinthetjük egy várakozás-alapú modellnek, ez utóbbiak pedig egyértelműen a múlt adataiból indulnak ki, amelyek a múlt megfigyelései próbálnak következtetéseket levonni illetve előrejelzést adni a lehetséges terjedelemtől, együttmozgásról.

A pénzügyi faktor-modellezés során kanonikus alapeloszlás-modellnek a normalitást tekintik, azonban kifejezetten az eloszlás-szélek kapcsán alternatív megoldások keresése vált szükségessé. Fama [1965] terjedelmes tanulmányban összegzi a részvényárfolyamok modellezéséről a 60-as évek közepéig gyűjtött tapasztalatokat, amelyek azonban ma is megállják a helyüket. Kiinduló modellje a véletlen bolyongás hipotézise, amely két feltevésen alapszik: (1) az egymást követő árfolyamváltozások függetlenek, illetve (2) az árfolyamváltozások meghatározhatók valamilyen valószínűségeloszlással.

Függetlenség vonatkozásában tapasztalatai szerint az autokorrelátlanság nagyrészt igazolható, ha nem is éppen zéró a tapasztalati hányados, a hatékony piacok hipotézisének tartalmi elfogadásához megfelelően alacsony. A függetlenség legegyszerűbb (és nem igazán valóságos) interpretációja az, hogy ha maguk a releváns információk (információs hatások) egymástól függetlenül érkeznek, ekkor maguk az árak is függetlenül mozognak, amennyiben nincs konzisztens változás a részvény belső értékéhez kapcsolódó piaci véleményben. Az információ generálódás függetlensége azonban igen szélsőséges feltételezés, a valóságban a pozitív illetve negatív hírek nem függetlenek, sokkal inkább mondhatjuk, hogy egymást időszakosan követik, összekapcsolódnak. Ha azonban van is autokorreláltság az információ-generáló folyamatban, amennyiben sok piaci szereplő van, az információ hatása *pillanatok alatt* megjelenik az árváltozásban, így a nagy sebességu információ-beépülés miatt maguk az árak már függetlenül változnak Fama szerint.

A valószínűségeloszlás a két követelmény közül a gyengébbik, azaz a hatékony piacok hipotézise Fama szerint megengedhet a normalitáson kívül más lehetséges eloszlást is. Ugyanakkor a valószínűségeloszlás jellege (illesztése) a kockázati jellegre igen jelentős befolyással bír: ha a normális eloszlás helyett valamilyen vastagszélű (és csúcsos, azaz leptokurtikus) eloszlást találunk, akkor a nagy árfolyamváltozások – kockázatkezelési szempontból főleg a veszteségek – normalitáshoz képesti relatív valószínűsége jóval magasabb lesz.

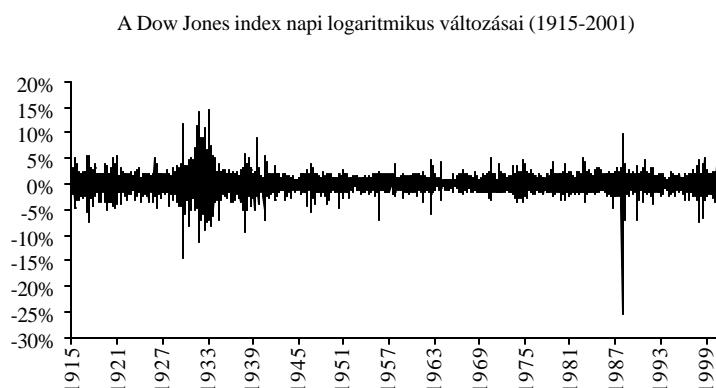
A pénzügyi árfolyammodellezés klasszikus alapeloszlása tehát a normális eloszlás. Az első közismert tudományos értekezés, amely az árfolyamváltozások normalitása mellett érvelt, Bachelier 1900-as „*Théorie de la spéculation*” c. dolgozata volt. Az eloszlás számos kedvező tulajdonsága:

- összeadásra nézve stabil, azaz az idotengely változtatásával az eloszlás jellege nem változik – ugyanolyan alakú hisztogramot kapunk napi és éves hozamokra, mindössze a volatilitás skálázódik át, a hozamok autokorrelátlansága esetén az idő négyzetgyökével;
- véges varianciájú;
- és az átlag valamint variancia ismeretében magának az eloszlásnak a paramétereit is tudjuk.

Mindezek a tulajdonságok az árazási modellek felépítésében rendkívül jelentős előnyt jelentenek – az árfolyamváltozások analitikusan jól kezelhetőek, lásd pl. az

Ito-lemma alkalmazását. Ugyanakkor pontosan a kockázatmentes szempontjából sarkalatos stresszes időszakokban a tapasztalat szerint igen kiugró, szélsőséges, és így a normalitás szempontjából kezelhetetlen nagyságrendű hozamok (veszteségek) jelentkezhetnek²⁸.

35. ábra



Ezen „vastagszélű” eseményeknek a kezelhetősége, statisztikai mérhetősége mind a közgazdászok, mind a matematikusok érdeklődését felkeltették – és ezt a problémát már maga *Bachelier* is észlelte néhány évvel utóbb híressé vált dolgozata elkészítése után.

A normalitás tesztelésre számos normalitás teszt közül többek között például a parametrikus *Jarque-Bera tesztet*,²⁹ illetve az ugyancsak χ^2 -statisztikán alapuló, általánosan alkalmazható illeszkedésvizsgálatot³⁰ alkalmazhatjuk. A formális tesztelési eljárások mellett vizuális támpontot jelentenek a hisztogramok mellett

²⁸ A történelmileg legmegrázóbb DJ szakadás 1987. október 19-én logaritmikusan számolva -25.6%-os mértékű volt, ami GARCH variancia alkalmazásával is az előző napról előrejelzett volatilitás 13-szorosa volt! Ez a normalitás szempontjából gyakorlatilag értelmezhetetlen.

²⁹ Normalitás Jarque-Bera tesztje:

$$JB = \frac{N-k}{6} \left[S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2 \right] \sim \chi^2(2)$$

S : ferdeség, K : csúcsosság, k : becsült paraméterek száma, N : mintaelemszám

A teszt leírásáról részletesen lásd pl.: *Mills* [1993]

³⁰ Illeszkedésvizsgálat során egy véletlen változó tapasztalati eloszlását vetjük össze egy, a nullhipotézisben megfogalmazott eloszlással. A K statisztika $(r-k-1)$ szabadságfokú χ^2 -eloszlást követ, ahol:

$$K = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$$

látható *quantile-quantile plot*-ok is, amelyek ugyancsak azt mutatják, hogy az együttes eloszlások nem teljesítik a normalitást. (A *quantile-quantile plot* egy vizsgált változó tapasztalati eloszlását hasonlítja össze egy elméleti eloszlásfüggvény alakjával, jelen esetben a standard normális eloszlásával. Ha a tapasztalati eloszlás normális, a grafikonon egy átlós egyenes szakaszt láthatunk, ami azt jelenti, hogy a vizsgált és a kontrollváltozó kvantilisei azonos ütemben jelentkeznek. A grafikonok S alakjának alsó és felső része a vastag széleket, a középső meredekebb szakasz a csúcosságot tükrözi.)

Mivel számos esetben élek eloszlás-szimulációs eszközökkel, röviden kitérek a normális eloszlás szimulációs eljárására. Általánosságban, ha x standard egyenletes eloszlású véletlen változó a $(0,1)$ nyitott intervallumban, és F eloszlást szeretnénk szimulálni, akkor

$$F^{-1}(x) \sim F$$

összefüggés alapján tehetjük meg, amennyiben ismerjük az inverz függvényt. A normális eloszlás esetében ezt elméletileg nem tehetjük meg (bár közelítő numerikus megoldással élhetünk a gyakorlati alkalmazások során). A Box-Müller-transzformáció³¹ elméletileg is helyes szimulációt tesz lehetővé: ha x_1 és x_2 standard egyenletes eloszlású független véletlen változó a $(0,1)$ nyitott intervallumban,

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2 \ln(x_1)} \cos(2\pi x_2) \\ z_2 &= \sqrt{-2 \ln(x_1)} \sin(2\pi x_2) \end{aligned}$$

z_1 és z_2 standard normális eloszlású független véletlen számpár. Monte Carlo szimulációval végrehajtott kvantilis becslésnél (pl. VaR-számítás) a kvantilis becslési hibája a

$$se = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n \cdot f^2(\hat{x})}}$$

formulával határozható meg, ahol p a percentilist meghatározó valószínűségi szint, az n a szimulációk száma, f pedig a szimulált eloszlás elméleti sűrűségfüggvénye. A formulából látható, hogy a becslési hiba a szimulációk számának négyzetgyöke arányában csökken csak – emiatt sokszor hatékonyabb, ún. *variancia-csökkentő*

és r jelenti a vizsgált változó eloszlása elemzésekor meghatározott osztályközök számát, a v_i az i . osztályközbe kerülés számát, a p_i az i . osztályközbe kerülés valószínűségét az „elméleti” valószínűségeloszlás szerint, továbbá n a mintaelemszám.

³¹Lásd pl.: Medvegyev [2001]

technikák (pl. ellentétes elojelek módszer, kvázi véletlenszámok, stb.) alkalmazására lehet szükség, ezekkel azonban dolgozatomban nem foglalkozom.

3.1.1 Nem-parametrikus suruségfüggvény

Egy adatsor eloszlásának legegyszerűbb nemparaméteres becslése a hisztogram. A hisztogram azonban érzékeny az osztályközök számára, továbbá nem folytonos. Az ún. *kernel* suruségfüggvény becslés során a hisztogram „dobozait” simító hatású „púpokkal” helyettesítjük. A simítás azáltal érhető el, hogy az éppen kiértékelés alá eső megfigyelés-értéktől távol eső megfigyeléseket kicsi, a közel esőket pedig relatíve nagy súllyal látjuk el. Egy X adatsor x pontjához tartozó kernel suruség becslése a

$$f(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

formulával történik, ahol N a megfigyelések száma, h a sáv szélesség (vagy simítási paraméter) és $K()$ a kernel függvény, melynek integrálja 1. A kernel függvény tulajdonképpen egy olyan súlyozás, amely a púpok alakját határozza meg. Noha számos kernel függvény alak létezik, én az illusztrációhoz a *Gauss*-i alakot használom:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$$

Megjegyzendő, hogy ezúttal a *Gauss*-i kifejezésnek semmi köze a *normalitáshoz*. A Gauss-függvénynek egyetlen szerepe van: a megfigyeléseket különböző súlyozással ellátni. A *Gauss-függvény* nagy súlyt ad azon megfigyeléseknek, melyek közel esnek x -hez és kicsit, melyek távol vannak tőle. Természetesen folytonos esetben a Gauss-függvény integrálja 1.

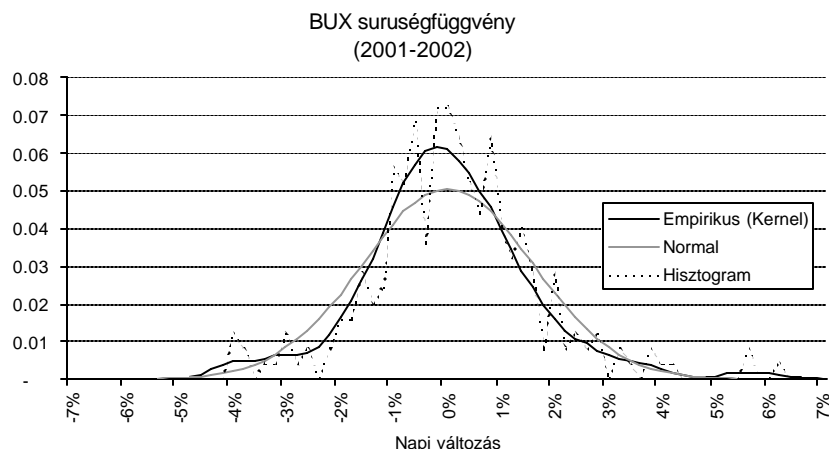
A h sáv szélesség befolyásolja a kernel suruség simaságát. Minél nagyobb h értéke, annál simább a becsült suruségfüggvény, ezért ennek megfelelő megválasztása kulcsfontosságú, és a szakirodalom számos különböző eljárást ajánl. Az ún. *Silverman*-módszer az adatbázis alapján határozza meg h értékét:

$$h = 0.9N^{-1/5} \min(\mathbf{s}, R/1.34)$$

ahol $R = (75\text{-ik percentilis} - 25\text{-ik percentilis})/2$.

Az illusztrációhoz a *Silverman*-eljárást alkalmaztam:

36. ábra



A kernel suruség szemmel láthatóan *szépen* igazodik az egyszerű hisztogram alakjához, ám további elemzéseim során általában a paraméteres suruségfüggvényeket részesítettem előnyben.

3.1.2 Stabil eloszlások

A klasszikus árfolyam-modell szerint tehát az árváltozások tranzakcióról tranzakcióra *függetlenek*, *azonos eloszlásúak*, és *véges varianciájúak*. Ha a napi, heti vagy havi rendszerességgel megfigyelt tranzakciók száma *nagy*, és *egyenletesen* követik egymást, akkor a hosszabb időszakok szerint mért árfolyamváltozások a rövid időszakok független azonos eloszlású (FAE) változóinak *összegeiként* értelmezhetők, és a FAE valamint véges variancia esetében ezek a *normális eloszláshoz* mint határeloszláshoz vezetnek.

A valóságban tapasztalható hisztogramok azonban a normális eloszláshoz képest leptokurtikusságot, azaz középen csúcsosabb, a széleken vastagabb „farok” jelenséget mutatnak. A normalitás hipotézisével szemben egy új megoldással (mondhatjuk talán, hogy *paradigmával*) állt elő Mandelbrot 1963-ban³², amely gyakorlatilag a normalitás mint összegek határeloszlása *általánosításának* is felfogható. Igaz, elemzését nem kifejezetten *pénzügyi*, hanem gyapot-ár idosorokra végezte el, 2 évvel később Fama alkalmazta ugyanezt az elemzést tozsdei árfolyamokra. Mandelbrot előtt a szélsőséges eseményeket úgy fogták fel, mintha

³² Mandelbrot [1963] illetve műveinek összefoglaló kötete: Mandelbrot [1997]

azokat valami – a normális hozamokat generáló folyamattól eltérő – mechanizmus generálná³³, és mint *mérési hibákat*, kihagyták az elemzésből. Csakhogy amíg a statisztikusok megtehetik, a kockázatkezelők aligha hanyagolhatják el az extrém veszteségek veszélyét. *Mandelbrot* nem a mintából való kizárást, hanem az egységes modell kiválasztását javasolta – amely mind a tipikusnak mondható, mind a ritka eseményeket egyszerre és egységesen kezelni tudja: a *Mandelbrot* által „stabil *Pareto*”-nak nevezett eloszlásokat, melynek egy kitüntetett esete maga a normális eloszlás is.

Dolgozatomban ezen pontján hangsúlyoznom kell, hogy matematikai szempontból igen fontos és mélyen tárgyalt téma a határeloszlásoké, én csak a legfontosabb jellemzőkre és pénzügyi alkalmazási lehetőségekre koncentrálok, de matematikai szempontból részletes tárgyalása található magyar nyelven például *Medvegyev* [2001] könyvében, illetve maradván a *pénzügyi matematikai* szakirodalom körében, angol nyelven az ETHZ kutatói által írt, terjedelmének nagyobb hányadában az extrém-stabil eloszlásokra koncentráló szakkönyvben (*Embrechts, Klüppelberg, Mikosch* [1997]), illetve *Rachev és Mittnik* [2000] könyvében. Ezen felül számos publikáció és empirikus kutatás tárgyalja különböző megközelítésben a stabil eloszlások alkalmazási lehetőségeit – melyekre a későbbiekben még hivatkozok.

Egy X véletlen változót összeadásra nézve stabil eloszlásúnak mondunk, ha c_1, c_2 nemnegatív számokra valamint $b(c_1, c_2) > 0$ és $a(c_1, c_2)$ valós értékekre fennáll (*Embrechts et al.* [1997], pp. 70-71):

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{d}{=} b(c_1, c_2) X + a(c_1, c_2)$$

ahol X_1 és X_2 független. Ha egy eloszlás stabil, akkor az független azonos eloszlású változók standardizált összegeire nézve határeloszlás:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} b_n X + a_n$$

ahol a_n és $b_n > 0$ normalizáló és centralizáló konstansok. Emellett más stabileloszlás-fogalmak is léteznek, például a szélsőértékek tekintetében stabil eloszlásról beszélünk, ha

³³ Gyakorlatilag ezen a logikán alapszik a jump-diffusion modellek háttérmagyarázata.

$\max(X_1 \dots X_n) = c_n X + d_n$, ahol $c_n > 0$ és d_n normalizáló és centralizáló konstansok (Embrechts et al. [1997], pp. 120). Dolgozatomban a (normalizált) összegzésre nézve stabil (α -stabil) eloszlásokra koncentrálok.

A stabil eloszlások két alapvetően fontos tulajdonsággal rendelkeznek:

- az összegzésre nézve invariánsak, azaz ha stabil változókat összegzünk, azok eloszlása nem változik. Ezt a tulajdonságot a mindennapi kockázatkezelésben akkor használhatjuk ki, ha például 1 napos VaR értékből 10 napos VaR értéket számolunk a *terjedelmi paraméternek* a t idoskálá-paraméter $1/\alpha$ -ik (normalitás esetén *speciálisan* a 0,5-ik) hatványával történő felszorozásakor. Ilyen egyértelmű átváltást nem tehetünk meg más vastagszélű eloszlás alkalmazásakor, így például ha *student* eloszlással dolgozunk, az 1 napos VaR ismeretében nem tudunk a 10 napos VaR-ra következtetni, mivel a *student-t* eloszlás az összeadásra (tehát adott példánál maradva a 10 nap hozamai összegére nézve) nem stabil.
- Gnedenko és Kolmogorov által bizonyított tény³⁴, hogy ezek az eloszlások az *egyetlen lehetséges határeloszlásai* a független, azonos eloszlású (véges vagy végtelen varianciájú) változók összegeinek. (Véges variancia esetén ez a határeloszlás a normális eloszlás.)

Az eloszlás 4 paraméterrel írható le: az α ($0 < \alpha \leq 2$) a „karakterisztikus exponens”, amely nagyságából az eloszlás leptokurtikusságára következtethetünk, β a szimmetria paraméter ($-1 \leq \beta \leq 1$), g ($g > 0$) a terjedelmi paraméter és d a lokációs paraméter. Több irodalmi forrás a fent alkalmazott g helyett s -t, a d helyett pedig m -t alkalmaz jelölésként, melyek a tartalmukban hasonló értelmezéssel bíró normális eloszlásnál alkalmazott jelölésekre engednek asszociálni.

Abban az esetben, ha $\alpha=2$, az eloszlás véges varianciával jellemezhető – ez maga a normális eloszlás – ha ennél kisebb, nincs véges variancia. Abban az esetben, ha α 1-nél is kisebb, a várható érték sem konvergál ($\alpha=1$ esete az ún. Cauchy-eloszlás), de tapasztalat szerint pénzügyi idosorokra általában fennáll az $1 \leq \alpha \leq 2$ reláció. Az összeadás során az α és a β paraméterek konstans értékek maradnak, a terjedelmi és lokációs paraméterek átskálázódnak. Tartalmilag ez azt jelenti, hogy valamekkora időintervallumon mért árfolyamváltozás

³⁴idézi pl.: Mandelbrot [1997] illetve Fama [1965], lásd még pl.: Medvegyev [2001]

részintervallumokon bekövetkezett változások összegeként fogható fel, és ha a tranzakciók az idok során meglehetősen *egyenletességgel* követik egymást, valamint az árfolyamváltozások függetlenek és azonos (stabil) eloszlásúak, akkor a különböző idoskálán mért hozamok ugyancsak azonos eloszlást követnek az **a** és a **b** változatlanlansága mellett.

A stabil eloszlások *stabilitási jellege* empirikus oldalról azt jelenti, hogy a *napi*, *heti* illetve *havi* gyakorisággal – egymást át nem fedo intervallumokon – mért hozamok eloszlásai ugyanazzal az **a** exponens értékkel jellemezhetok. Ezzel kapcsolatban viszont már nincs összhang az empirikus irodalomban. *Kon* [1984] megfigyelése – és más forrásokra való hivatkozása – szerint a stabil eloszlások különböző idoskálán mért **a** paramétere nem marad változatlan, a *havi* gyakorisággal mért hozamok már erosen a normalitást jelzo 2-es paramétert mutatják, illetve általánosabban: az idointervallum nagyságának növekedésével az **a** paraméter is no, amely nem konzisztens a stabil eloszlás alapvetésével.

A normális és az általános stabil eloszlás mint piaci hozameloszlás-modellek jellegében, viselkedésében a legfontosabb különbség, hogy a normalitás esetében, ha a hosszú ido alatt bekövetkezo árfolyamváltozás ugyan nagy értéket vehet is fel, ám az egyes egyedi árfolyamváltozások mértéke külön-külön elhanyagolható az egész idoszaki változáshoz képest. Általános, $a < 2$ esetben azonban a nagy idoszaki összesített változást valószínűleg *néhány nagy*, rövid közbülso periódusban bekövetkezett *egyedi* változás magyarázza, nem pedig egyenletesen az összes, azaz az árfolyamban eros *szakadások* következnek be.

Ha fenntartjuk a hatékony piacok hipotézisével konzisztens árfolyamváltozások függetlenségét, a hatékonyság azt jelenti, hogy a részvény belso értékét érinto információk *azonnal* beépülnek az árakba azok pillanatok alatt bekövetkezo igazodásával. Azaz, durván fogalmazva az aktuális árak olyan gyakran *lonek túl* az új belso értéken, amilyen gyakran *alálonek*. *Gauss*-i esetben ez azt jelenti, hogy a belso érték nem surun változik nagymértékben. A *Pareto*-i esetben viszont a nagy szakadások a belso érték eroteljes és rövid idon belül bekövetkezo megváltozását (illetve az azt hordozó információk) megjelenését jelzik – amely jóval inkább konzisztens a valóság bizonytalan környezetével. Természetesen ezek a nagy szakadások meroben más kockázati jelleget is sugároznak, mint az egyszerű normalitás. *Mandelbrot* ezeket az esetenként *koncentráltan* megjelenő nagy

változásokat – melyek néhány nap alatt hasonló nagyságrendet érhetnek el, mint máskor a hónapok alatt bekövetkező változások – tekinti az árák diszkontinuitása fő magyarázatául. (Persze kicsit hanyagul értelmezve itt a kontinuitás fogalmát, hiszen az áralakulás a valóságban mindig diszkrét.)

A stabil eloszlások összeadásra nézve invariáns tulajdonságán és a FAE változók összegének általános határeloszlás jellegén túl praktikus okokból még egy tulajdonságot meg kell említeni. Az eloszlás ezen tulajdonságaira Lévy világított rá 1925-ben: az eloszlás farkának lecsengése aszimptotikusan a Pareto-eloszlást követi, azaz a normálistól eltérő módon nem exponenciális, hanem annál lassabb, hatványszerű (*Mandelbrot* [1997] illetve *Fama* [1965]).

Dolgozatomban az alfa-stabil (összeadásra nézve stabil) eloszlásokkal foglalkozom, mert azok a teljes eloszlást lefedik, és nem csak a szélsőséges (blokkonkénti szélsőséges vagy a farok egy szeletétől tekintett szélsőséges) értékeket modellezzik. Hozzáteszem, hogy az *extrém-érték elmélet* (EVT) és vele együtt az *extrém eloszlások* megkérdőjelezhetetlen eszközei a stresszhelyzetek elemzésének.

Az összeadásra nézve stabil eloszlásokat karakterisztikus függvényükkel (avagy *Fourier-transzformáltjukkal*) szokták megadni³⁵:

$$f(t) = E(e^{itx}) = \exp \left\{ i \int_0^t g(u) du - \frac{1}{p} |t|^a [1 - i b \operatorname{sgn}(t) w(t, a)] \right\}$$

ahol x véletlen, t valós változó, a többi paramétert a korábbi részben már ismertettem, és

$$w(t, a) = \begin{cases} \tan \frac{\pi a}{2}, & \text{ha } a \neq 1 \\ \frac{2}{p} \log |t|, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

A suruséggfüggvény az inverz Fourier-transzformáció segítségével, de csak továbbra is integrálalakban fejezhető ki. Szimmetrikus ($b=0$) esetben, 0 várható érték esetén ez az alábbi alakra egyszerűsödik, amely legalább azzal az alkalmazói

³⁵ Ezt a felírás-formát Fama-tól vettem, de szinte az összes tárgykörben hivatkozott irodalom ismerteti ezt a függvényalakot. A stabil eloszlások karakterisztikus függvényének általános alakja,

$e^{-c|t|^a}$. megjegyzendő, hogy a normális eloszlás karakterisztikus függvénye: $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

szempontból *kedvezo* tulajdonsággal rendelkezik, hogy kiesik belole a komplex szám imaginárius részét képviselo sin-os tag³⁶:

$$f(x) = \frac{1}{p_0} \int_0^{\infty} \exp(-g^a) \cos(tx) dt$$

A stabil eloszlások szimulációját és heurisztikus összehasonlítását a függelékben tárgyalom. A stabil eloszlások feltétlen elonyét az elméletileg elegáns tulajdonságaik jelentik, hátrányuk azonban, hogy alkalmazásuk, illesztésük, számításuk nem kifejezetten könnyu. Minthogy a suruségfüggvény nem fejezhető ki, csak integrál alakban, különböző „trükkös” vagy numerikus megoldásokkal lehet az eloszlás paramétereit becsülni. Emiatt „illik” több megoldást is alkalmazni, mert minden megoldás valamilyen elonnyel és ezzel együtt hátránnyal is jár. A számos eljárás közül néhány:

- *Maximum Likelihood*, ami a suruségfüggvény explicit ismeretében a magától értetodo eljárás lenne (*Nolan* [1998?]);
- Minta karakterisztikus függvényen alapuló *regressziós típusú*: a későbbiekben ismertetem részletesen;
- Empirikus hisztogramon alapuló *regressziós módszer* (*Palágyi, Mantegna* [1998]);
- Mintából számolt *kvantiliseken* alapuló becslés (*Fama* [1965] illetve *McCulloch* [1998]);
- Legkisebb négyzetek módszere (*Janecskó* [2000]);
- Az extrémérték-elméletben is alkalmazott *Hill-féle eloszlásszél-becslő módszer* (lásd pl.: *Fofack, Nolan* [1999], *Medvegyev* [2000], vagy *Embrechts et al.* [1997], pp. 330);
- A fraktálanalízisben alkalmazott, úgynevezett „rescaled range” avagy R/S analízis³⁷, mely során az idosorok *hosszú távú memóriáját*, hosszú távú összefüggését jellemző *Hurst-exponensre* (*H*) adnak becslést, amely egyben az *a* paraméter reciprokának is tekinthető. *Hurst* a módszert egyébként a folyók vízállásváltozásának vizsgálatára alkalmazta. A megközelítés logikája szerint ha különböző *n* hosszúságú intervallumonként összegezzük a

³⁶ Mivel $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$, és szimmetria esetén a sin-os tagok egymást kiejtik, lásd: *Medvegyev* [2001]

³⁷ A módszer részletes technikai leírása és alkalmazása pl.: *Peters* [1994] 56.old. illetve a *Hurst-exponens és stabil eloszlás kapcsolata*: 213. old.

megfigyeléseket, az összegzés $n^{1/a}$ mértékben átskálázza az összegzett véletlenváltozók lehetséges terjedelmét³⁸. (Gyakorlatilag a szórás-idohossz kapcsolat általánosításáról van szó, azonban sejthető, hogy a négyzetgyökös kapcsolatnál a tapasztalat szerint konzervatívabb átszámítási arány adódik – ez információt adhat arról, hogy bizonyos sokkhatások az összeadás során is *perzisztens* módon megjelennek, nem eliminálódnak.) $H=0,5$ esetben beszélhetünk függetlenségről, ennél magasabb érték esetén *perzisztenciáról*. Az önmagában eloszlásfüggetlen módszert *Mandelbrot* is alkalmazta.

Egy igen könnyen algoritmizálható, regressziós alapú módszert ismertet *Koutrouvelis* [1980]. Ha tekintjük a

$$f(t) = E(e^{itx}) = \exp\left\{dt - g|t|^a [1 - i b \operatorname{sgn}(t)w(t, a)]\right\}$$

karakterisztikus függvényt, könnyen belátható, hogy zéró várható érték és szimmetria esetében

$$\log(-\log|f(t)|^2) = \log(2g^a) + a \log|t|$$

amely csak a -tól és g -tól függ. Így ezeket a paramétereket $y = \log(-\log|f(t)|^2)$ kifejezésnek $w = \log|t|$ -re történő regressziós becslésével meg tudjuk határozni. A becsléshez empirikus *minta-karakterisztikus függvényértékeket* kell számolnunk, amely szimmetrikus esetben:

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itx_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos(tx_j)$$

ahol n a megfigyelt hozamok száma. Kérdés, hogy hány ponton végezzünk regressziós becslést. A hivatkozott cikk az alábbi segédtáblát javasolja:

³⁸ ahol a terjedelem alatt egy speciális, ún. R/S statisztikát értenek.

5. táblázat

K	A megfigyelési minta (n) nagysága		
a (várható) értéke	200	800	1600
1,9	9	9	10
1,5	11	11	11
1,3	22	16	14
1,1	24	18	15
0,9	28	22	18
0,7	30	24	20
0,5	86	68	56
0,3	134	124	118

és a t valós értékre a $t_k = pk/25$, $k = 1,2 \dots K$ meghatározást javasolja. Ezek után a regressziós feladat valóban könnyen számolható:

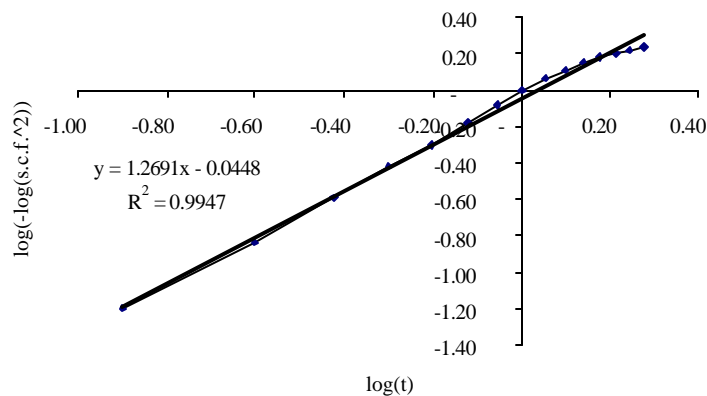
$$y_k = m + aw_k + e_k \quad k = 1,2 \dots K$$

ahol t_k K számú valós szám, és $m = \log(2g^a)$

Koutrouvelis az elemzést előzetesen feltételezett terjedelmi és várható értékkel történő standardizált megfigyelésekre javasolja elvégezni, és az elemzés leírását továbbviszi a nem szimmetrikus eloszlás esetére is, én azonban elemzéseim során az egyszerű alkalmazhatóság kedvéért *szimmetriát* feltételeztem, azaz a módszerrel csak a *karakterisztikus exponenst* és a *terjedelmi paramétert* számoltam. Az alábbi ábra 1,3-as indexu, 1000 db szimulált véletlenszámmra illesztett becslést illusztrál³⁹:

37. ábra

Koutrouvelis módszere ($k=1 \dots 15$)



³⁹ Az ábrán az (s.c.f.^2) kifejezés a minta-karakterisztikusfüggvény négyzetét jelöli.

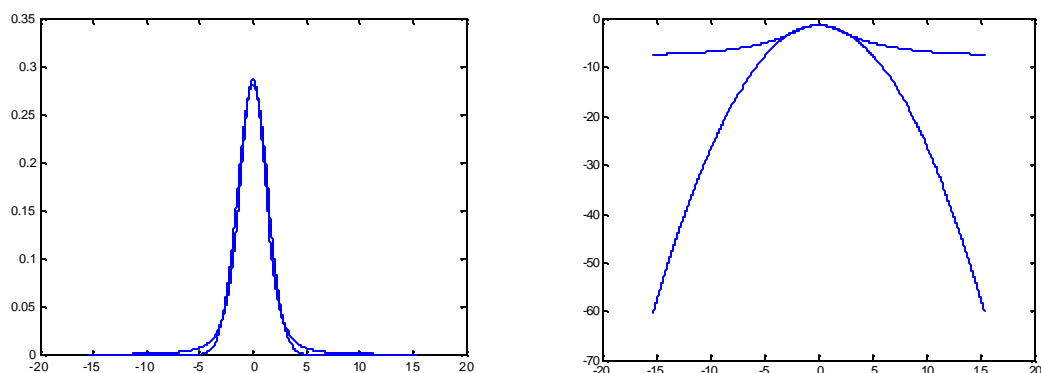
A becsült exponens-érték a szimulált adatokra 1,27-nek adódott. *Nolan* ML programja ugyanerre az adatsorra 1,35-ös értéket jelez, tehát mindenképpen kell számolnunk a becslések során felmerülő hibákkal.

Gyakran – főképpen elméleti kutatások során – tranzakciósintu adatok sokaságára készül el az elemzés (pl. *Jánosi et al.* [1999] illetve *Palágyi et al.* [2000?]), én azonban – a gyakorlati oldalról közelítve – napi adatokra alkalmaztam az illesztést. Az adatsor hosszúságát illető igény némiképpen módszer-függo is. A *Mantegna*-módszer valóban sok adatot igényel, a *Koutrovelis* módszerrel már éves idosorra is tudunk illeszteni. Dolgozatomban saját algoritmusként ezt az utóbbi módszert használtam, összevetve a *Nolan*-féle maximum likelihood program által számított értékkel. (A becsült exponensek *gyakorlati* szempontból *megnyugtatóan közel* kerülnek egymáshoz: az eltérések 0,05-0,1-es különbségeket nem haladtak meg.) *Weron* [1996]b külön tanulmányt szentel a stabil eloszlások illesztési módszerei összehasonlításának: a *maximum likelihood*, a *kvantilisek* módszere, és a *minta karakterisztikus függvényen* alapuló eljárások kerülnek összefoglalóan ismertetésre, de összehasonlításra csak az utóbbi két módszer család kerül. *Weron* tapasztalata szerint a *Koutrovelis* módszer elfogadható és megbízható eljárásnak bizonyul.

A suruségfüggvény kiszámítása – mint erre már többször kitértem – nem könnyű, de megoldható feladat⁴⁰, és az a maximum likelihood becsléshez elengedhetetlenül szükséges. Az alábbi ábra MATLAB-ban készült 1,5-ös exponensu stabil eloszlás és a normális eloszlás suruségfüggvényét, illetve azok logaritmusát hasonlítja össze – a parabolikus jelleg a normális, a hiperbolikus a stabil eloszlást jellemzi:

⁴⁰ *Nolan* [1999]

38. ábra



Az általam követett számítási módszer röviden az alábbiakban kerül ismertetésre (Rachev, Mittnik [2000], pp. 121 alapján). Ismert, hogy a karakterisztikus függvény alakja:

$$f(t) = \exp \left\{ i \mathbf{a} t - \mathbf{g} |t|^a \left[1 - i \mathbf{b} \operatorname{sgn}(t) \tan \frac{\pi a}{2} \right] \right\}, \text{ ha } a \neq 1.$$

Az inverz Fourier-transzformációval meghatározható a suruségfüggvény, amely:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

A probléma az integrál numerikus elvégzése, melyre megoldást jelent a „gyors Fourier-transzformáció” (*Fast Fourier Transform*) technika. A MATLAB program abból a szempontból jelentett nagy segítséget számomra, hogy kidolgozott algoritmus van az FFT elvégzésére, így a karakterisztikus függvény numerikus integrál értékét „készen kaptam” vissza néhány – az imént hivatkozott irodalomban leírt – behelyettesítési „trükk” után:

- az integrált N helyen értékeljük ki (ahol N 2 egész kitevoju hatványa, mondjuk 2048),
- a kiértékelési pontok h egyenlo távolságra vannak egymástól,
- a suruségfüggvény értelmezési tartományát jelento pontok:

$$x_k = \left(k - 1 - \frac{N}{2} \right) h, k = 1 \dots N$$

- A karakterisztikus függvénybe a $t = \frac{2\pi \left(k - 1 - \frac{N}{2} \right)}{Nh}$ értéket helyettesítjük.

3.1.3 Kevert normál eloszlások⁴¹

Analitikusan talán a legkönnyebben kezelhető, és emellett közgazdasági tartalommal is felruházható alternatívát jelentenek a *kevert normál* eloszlások, melyek alapgondolata, hogy a tapasztalati eloszlást nem egy, hanem több háttérmechanizmus állítja elő. A tapasztalt volatilitás nem egyetlen, hanem több, egymástól eltérő paraméterekkel rendelkező, ugyanakkor külön-külön még normális eloszlású folyamat eredménye, melyek valamilyen további folyamat szerint épülnek egymásra vagy lépnek egymás helyébe.

Fama megközelítése szerint az árfolyamváltozásokat generáló információáramlást nem kereskedési, hanem kronológiai idő szerint kell mérni, azaz pl. a keddtől szerdára számított idő eltér a péntektől hétfőre számított időtől, így a két példaként említett időszak közötti árfolyammozgást *eltérő* paraméterekkel rendelkező eloszlással kell modellezni, amelyre kiválóan alkalmas lehet a kevert normál eloszlás. Megjegyzendő, hogy *Fama* 1965-ben felveti a *napról-napra változó* paraméterekkel leírható normál eloszlásokból kikevert eloszlás lehetőségét is, igaz, tanulmányában *csak* a várható értéket tekinti változó paraméternek! Ha jól belegondolunk, ez tulajdonképpen a 80-as években népszerűvé vált GARCH-modellek, illetve a sztochasztikus volatilitás mögöttes alapgondolata is. *Fama* szerint *Mandelbrot* modelljének a kevert modellel szemben ugyanakkor előnye, hogy az egyszerre képes magában foglalni és kezelni mind a nyugodt, mind a stresszes időszakokat.

A kevert normál módszer lényege tehát, hogy egyfelől feltételezzük a normális üzletmenetet (a „normalitást” ezúttal statisztikailag is szó szerint értelmezve), ugyanakkor feltesszük, hogy a háttérben egy másik, a szélsőséges sokkhatásokért felelős folyamat is húzódik. Az ilyen modelleket ugrásos diffúzió (*jump-diffusion*) névvel is illetik.

A legegyszerűbb *ugrásos* modell esetében két normális eloszlású változó (illetve az eredményváltozó) kapcsolatát egy harmadik, nem normális (hanem

⁴¹ A továbbiakban tárgyalt egydimenziós módszerekről korábban közzétettem összehasonlító elemzést: *Kóbor* [2000]

például egy Bernoulli-változó⁴² vagy egy Poisson-eloszlású) véletlen változó határozza meg. A ugrásos diffúz modell legegyszerűbb felírása⁴³:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_t &= (1 - \mathbf{I}_t) \mathbf{r}_t^n + \mathbf{I}_t \mathbf{r}_t^b \\ \mathbf{r}_t^n &\sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2) \\ \mathbf{r}_t^b &\sim N(\mathbf{m}, \mathbf{t}^2) \\ \mathbf{I} &= (1, 0 | p, (1 - p)) \end{aligned}$$

A \mathbf{h} eredményváltozó esetére a normalitás már nem áll fenn. Az együttes eloszlás sűrűségfüggvényének meghatározásakor a valószínűségszámításból ismert tételből kell indulnunk, mely szerint A és B esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége: $P(A \& B) = P(A|B)P(B)$. Így ha tudjuk, hogy a véletlen változónk $(1 - p)$ valószínűséggel normális eloszlású folyamat \mathbf{s}^2 varianciával, p valószínűséggel pedig normális eloszlású folyamat \mathbf{t}^2 varianciával, akkor:

$$f(\mathbf{h}_t) = \frac{1-p}{\sqrt{2p\mathbf{s}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}_t - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2}\right) + \frac{p}{\sqrt{2p\mathbf{t}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}_t - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{t}^2}\right).$$

A modell paramétereinek meghatározásához felhasználható, maximalizálandó loglikelihood függvény:

$$L = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \frac{1-p}{\mathbf{s}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}_t - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2}\right) + \frac{p}{\mathbf{t}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}_t - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{t}^2}\right) \right\}$$

ahol \mathbf{m} a hozamok várható értéke.⁴⁴ Megjegyzem, hogy a maximum likelihood becslési eljárás a kevert normál eloszlások esetében meglehetősen nehézkesen alkalmazható, így helyette a 4-ik fejezetben részletes leírásra kerülő, azonos eredményre vezető ún. *E-M (Expectation Maximization)* algoritmust alkalmaztam.

A historikusan megfigyelt hozamadatainkat a modell tesztelése érdekében (azaz, hogy valóban normális eloszlást követ-e a két alapfolyamat) valamelyik alapfolyamathoz való tartozás valószínűsége alapján csoportosíthatjuk. Annak valószínűsége, hogy egy adott megfigyelés a nyugodt, normális alapfolyamathoz (és nem az ugrásokat jelölő magasabb volatilitású folyamathoz) tartozik:⁴⁵

⁴² A Bernoulli változók 1 vagy 0 értéket vesznek fel (p , illetve $(1-p)$ valószínűséggel). Bernoulli-változót egyszerűen lehet generálni 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású véletlen változó segítségével: ha a véletlen szám p alatti érték, akkor vesz fel 1, egyéb esetben 0 értéket a véletlen változónk. A Bernoulli-változók összessége binomiális eloszlással jellemezhető.

⁴³ részletesen lásd pl. Venkataraman [1997]

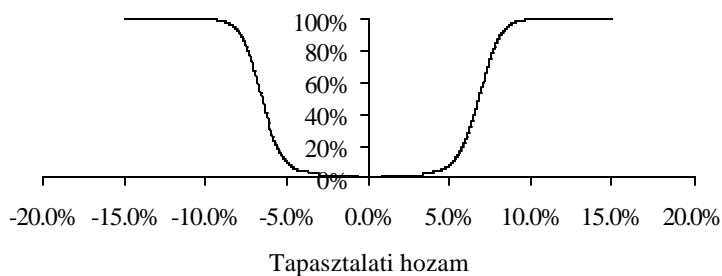
⁴⁴ Alternatív becslési eljárásról: Beckers [1981].

$$P(h_t \sim N(m, s^2)) = \frac{\frac{1-p}{\sqrt{2ps}} \exp\left(-\frac{(h_t - m)^2}{2s^2}\right)}{\frac{1-p}{\sqrt{2ps}} \exp\left(-\frac{(h_t - m)^2}{2s^2}\right) + \frac{p}{\sqrt{2pt}} \exp\left(-\frac{(h_t - m)^2}{2t^2}\right)}$$

Ezt a visszazámítást illusztrálja az alábbi ábra:

39. ábra

A megfigyelt hozam ugrásos folyamathoz tartozásának valószínűsége

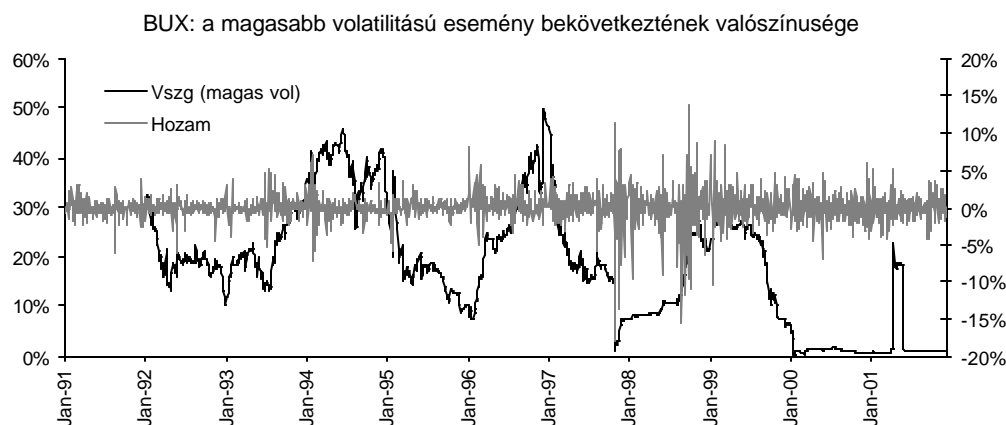


Számomra a kevert modellek jó illeszthetőségük és egyszeru közgazdasági interpretálhatóságuk mellett még egy kedvező tulajdonságot hordoznak: szimuláció során minden szimulált érték „reális” hozamnak tekinthető, azaz nem szükséges csonkolást végezni az eloszlásszélén – szemben például a stabil eloszlásokkal, ahol akár már 1,7-es index generálása során könnyen becsúszhat egy-két olyannyira extrém érték, amely egyszerűen irreálisan szélsőséges (mondjuk -234%).

Kon [1984] tanulmányában a kevert normál modellek illeszkedését vizsgálja, és 2, 3, 4 illetve 5 normális eloszlásból *kikevert* eloszlásokat illeszt részvények idosoraira – tapasztalatai szerint némiképp idosorfüggo, hogy elegendő-e a 2, avagy inkább több tag szükséges a legjobb illeszkedéshez. Tanulmányában a *(Bernoulli változó szerint)* kevert normál eloszlásokat nemcsak jó illeszkedő jellegük miatt, hanem közgazdasági interpretálhatóságuk miatt is elonyben részesíti. Az alábbi ábra a magasabb volatilitású esemény bekövetkeztének valószínűségét mutatja:

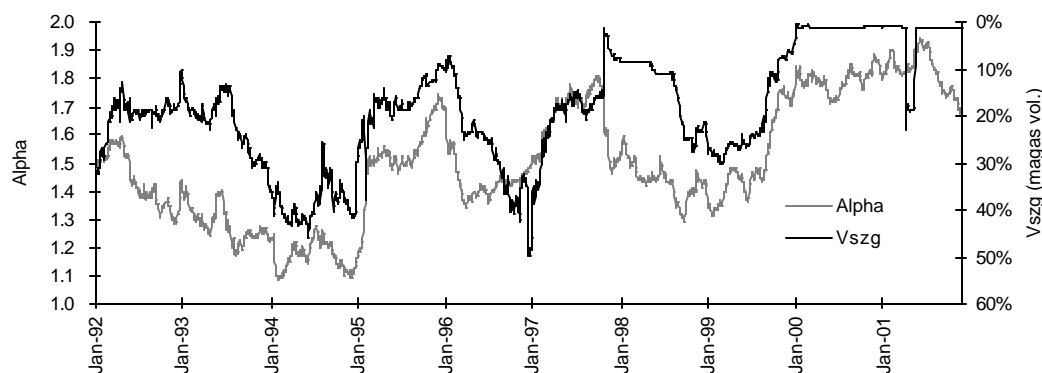
⁴⁵ Hasonló gondolatmenet például Hamilton [1994].

40. ábra



Az alábbi ábra a magasabb volatilitású esemény bekövetkeztének valószínűségét illetve a stabil eloszlás alfa indexét hasonlítja össze:

41. ábra



3.1.4 Egyéb leptokurtikus eloszlások

A stabil eloszlással szemben talán leggyakrabban állított alternatív eloszlás modell a *student-t* eloszlás, amely ugyancsak leptokurtikus jelleget mutat, ugyanakkor nem rendelkezik a stabil eloszlások elméleti szempontból kedvező tulajdonságaival. Sokan statisztikai kezelhetősége miatt preferálják, bár az eloszlás hasonló közgazdasági alátámasztását, interpretációját – mint a stabil vagy a kevert eloszlásoknál lehetséges volt – nem igazán lehet adni. Így tehát elemzési célra kedvező, modell-alkotásra kevésbé alkalmas ez az eloszlás. Egyetlen, számomra tartalmilag megfogható interpretációját Kon [1984] ismerteti: ha végtelenül sok

normális eloszlású változót keverünk össze (azaz ismét csak a kevert-normál logikából indulunk ki), és idézem: „a variancia független *inverz-gamma* folyamatot követ, akkor eredményül a *t*-eloszlást kapjuk”. Ez a megállapítás⁴⁶ nem biztos, hogy elegendő tartalmi interpretációt nyújt, ugyanakkor az eloszlást mint jó statisztikai eszközt elfogadom, és a későbbiekben – egyszerűen technikai alkalmazhatósága miatt – mint *leíró* módszert még a többdimenzionalitás terén eloveszem.

A *t*-eloszlás definíciója egyszerű: ha \mathbf{x}_i és \mathbf{h} független és standard normális eloszlású változók, akkor a

$$t = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}\mathbf{h}}{\mathbf{c}}$$

módon képzett *t* változó *n* szabadságfokú standard *t*-eloszlást követ. Az *n* elemszám (azaz a generálásban részt vevő \mathbf{c}^2 -eloszlású – négyzetre emelés előtt standard normális – tagok számának) növelésével a *t* eloszlás közelíti a standard normális eloszlást. A *t*-eloszlás normális eloszlástól való eltérése *n* „magas” (kb. 30 felett) értékeinél gyakorlati szempontból már nem érzékelhető.

A *t*-eloszlásnak 3 jellemző paramétere van: a *m* lokációs paraméter, a $\mathbf{g} > 0$ terjedelmi (vagy skálázódási) paraméter és a $\mathbf{n} > 0$ szabadságfok. Egy *x*, *t*-eloszlású véletlen változó *m* átlaggal (feltéve, hogy $\mathbf{n} > 1$) és $\mathbf{n}\mathbf{g}^2 / (\mathbf{n} - 2)$ varianciával (feltéve, hogy $\mathbf{n} > 2$) jellemezhető. Amennyiben *n* a végtelenhez tart, a *t*-eloszlás *m* várható értéku és \mathbf{g}^2 varianciájú *normális* eloszláshoz közelít. Minél kisebb azonban a szabadságfok, annál inkább vastag szélű a *t*-eloszlás. A *t*-eloszlások momentumai a szabadságfok egész részéig léteznek. A *standard t*-eloszlás sűrűségfüggvénye a következő módon írható le (ahol a $\Gamma(\cdot)$ jelenti a *gamma*-függvényt):

$$f(x) = \frac{\Gamma((\mathbf{n}+1)/2)}{(\mathbf{n}\mathbf{p})^{1/2} \Gamma(\mathbf{n}/2)} \left(1 + (x^2 / \mathbf{n})\right)^{-(\mathbf{n}+1)/2}$$

Abban az esetben, ha feltételezzük az r_i hozamok *t*-eloszlását, *maximum likelihood* becsléssel határozhatjuk meg a tapasztalati paramétereket.⁴⁷ A maximalizálandó loglikelihood függvényt a következőképpen írhatjuk fel:

⁴⁶ Ugyanez a megállapítás található még: *Marsh, Kobayashi* [2001], pp. 10. Hozzáteszik, hogy a folyamat a realizált volatilitásra kondicionálva normális, és a vastag farok jelenség rövid távon áll csak fenn.

⁴⁷ A *t*-eloszlás alkalmazásáról bővebben lásd: *Fernandez –Steel* [1996].

$$L = T \left[\ln \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{n}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln p n - \ln g \right] - \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^T \ln \left(1 + \left(\frac{r_i - m}{g\sqrt{n}} \right)^2 \right)$$

Kon összeveti a t -eloszlást a többелеmu kevert normál eloszlásokkal, de mivel az utóbbiak a ferdeségre is kényelmesen illeszthetők (emlékezzünk a 2. fejezetben tárgyaltakra), jobb illeszkedést tapasztal, mint a t -eloszlással. Ugyanakkor számos szakirodalom a t -eloszlást jobban illeszkedő modellnek találja, mint a stabil eloszlásokat. (Ez a tapasztalat lényegében fennáll ebben a dolgozatban is: az alrész végén a BUX és a DJIA 10 éves idosorára mind a *stabil*, mind a *student* eloszlás illeszkedik, de az utóbbi egy kicsit jobban...)

A kutatók körében úgy tunik, hogy a *student* eloszláshoz való viszony egy feloldhatatlan ellentétet jelent: *Mandelbrot* élesen kikel a *student*-eloszlással szemben, és egyfelől azt is vitatja, hogy a t -eloszlás jól (jobban) illeszkedne, de mindenképpen a stabil eloszlások mellett érvel azok nem *leíró*, hanem *magyarázó* jellege miatt, illetve az idoskálán való átválthatósága miatt (*Mandelbrot* [1997], pp. 69).

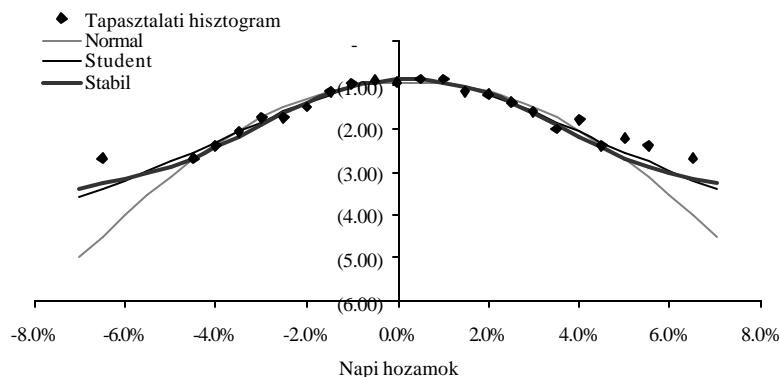
3.1.5 Esettanulmányok

1. A *stabil* és a *student* eloszlás összevetése

Illeszkedés szempontjából mind a *stabil*, mind a t -eloszlás egyértelműen előnyösebb eszköznek tunik a normalitásnál. 10 éves napi idosor alapján készült az alábbi ábra: 1991 és 2001 közötti BUX értékeket (gyakorlatilag a BUX teljes “élettörténetét”) figyelembe veszi az eloszlások illesztése:

42. ábra

A BUX napi hozamaira illesztett normál, stabil és student eloszlások
(log-skála)



A *khi-négyzetes* próba alapján az *utolsó 500 nap* (1999. nov. – 2001. nov.) illeszkedése:

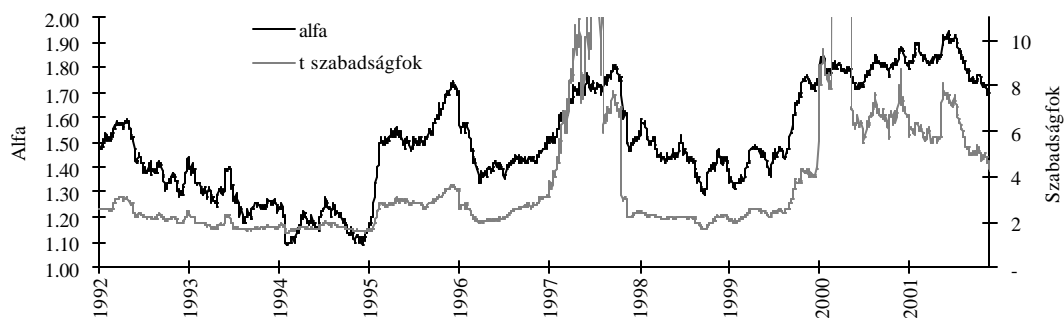
6. táblázat

Stac. eloszlás	BUX	DJIA (azonos időszak)
Normál	P=0,00 %	P=0,00 %
Stabil	P=23,71 %	P=16,78 %
Student	P=49,03 %	P=62,91 %

A teljes időszak illeszkedésvizsgálata a VaR összefoglaló táblában található. Ha az eloszlás-indexeket (α karakterisztikus exponens illetve n szabadságfok) 1 éves idosorokból naponta újrabecsülve együtt ábrázoljuk, azok hasonló tartalomról árulkodnak (azaz a normálishoz közelebb eső, illetve erősen csapongó időszakok jól megkülönböztethetők):

43. ábra

A BUX leptokurtikusságát mérő eloszlásindexek időbeli alakulása

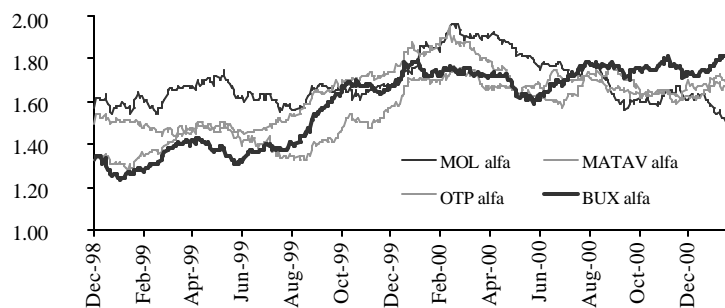


Az indexek együtt tágnak ki, jelezve az idosza kos hisztogramok normálisabb jellegét, illetve esnek össze, az erosebb leptokurtikusságról tanúskodva – tekintsük pl. 1998-at. Bár alulról mindkét index korlátozott, az alfa 2-höz közeli értéke jóval informatívabb, mint a szabadságfok „elszállása”, ami csak sejteti, hogy egyre közelebb kerültünk a normalitáshoz. Végül még egy megjegyzést kell tennem: az alfa-stabil és a t -eloszlások két elméleti ponton – bármekkora ellentétek is feszülnek alkalmazói között – azért találkoznak: az $\alpha=1$ és $\nu=1$, amikor mindketten Cauchy-eloszlást követnek (a t =normál/normál alakra egyszerűsödik), illetve az $\alpha=2$ és ν =végtelen (praktikusan 30 felett), amikor is mindketten normálisnak tekinthetők.

Az alábbi ábra egy érdekes empirikus tapasztalatról árulkodik: az azonos piacon megjelenő eszközök exponensei viszonylag közös sávban mozognak – ezt a jelenséget értelmezhetjük úgy is, hogy az alfa nem kimondottan eszköz-specifikus, hanem inkább piac-specifikus mutató – erre a jelenségre Palágyi Zoltán Ph.D. hallgató is rámutatott egy előadásában.

44. ábra

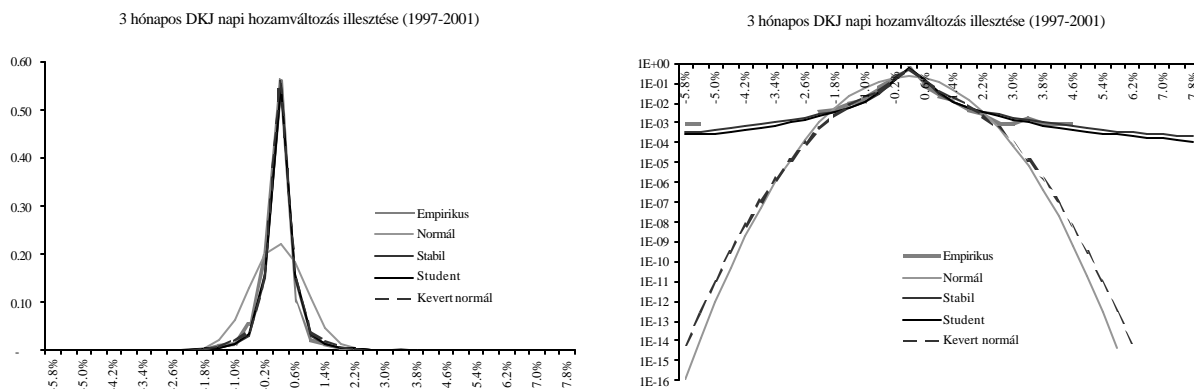
3 részvény és a BUX alfa értékének alakulása 250 napos csúszóablak alapján



2. A stabil, student és kevert-normál eloszlások összehasonlítása kamatláb-változásra

Mivel a legtöbb publikált elemzésben az illesztés részvényre vagy részvényindexre (esetleg devizára) történik, most a 3 hónapos DKJ hozamváltozásainak illeszkedését vizsgálom. A kamatlábak időszakonként jóval leptokurtikusabbak lehetnek – mivel sokszor, főképp rövid távú kamatlábak esetén – a monetáris politika is beleszól spontán életük alakulásába, így a függetlenség feltételezése is némiképp csorbul.

45. ábra

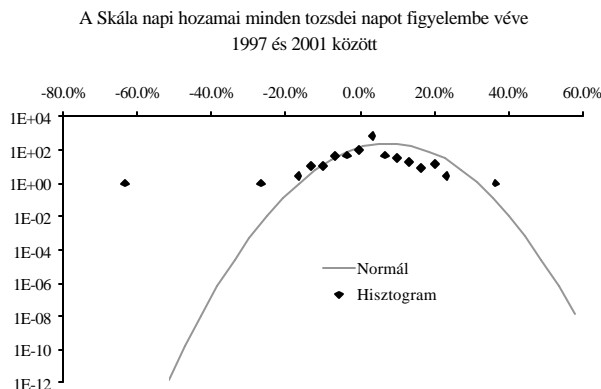


Az illeszkedés-próba során a normál eloszlás $p=0,00\%$, a stabil $p=1,12\%$ (alfa=1,19), a student $p=0,19\%$ (szabadság fok = 1,53) és a kevert normál $p=0,00\%$ (32% valószínűséggel magas 0,77%⁴⁸, és 68% valószínűséggel alacsony 0,18% volatilitású) szinten volt elfogadható az illeszkedésvizsgálatok során.

3. Illikvid részvény vizsgálata

A Skála-Coop részvény a BÉT-en az illikvid papírok közé sorolható. Stabil eloszlás illesztése során minden kereskedési napot figyelembe véve (azaz az árfolyamváltakozatlanságokat is bennhagyva) 0,88, a csak a valódi árfolyamváltozásokat tekintve 1,4 alfa adódott. Azért volt érdekes mindkét esetet megvizsgálni, mert például ha historikus szimulációt végzünk, a zero hozamú napokat is figyelembe kell vennünk az együttes scenáriók kialakításakor.)

46. ábra



⁴⁸ logaritmusos faktorváltozás alapján számított érték.

Ez az eredmény összhangban van azzal a megfigyeléssel, hogy az illikvid pozíciók jóval szakadásosabb árfolyamsorokat, jóval nagyobb ugrásokat produkálnak, mint a likvid piac.

3.2 Feltételes (autoregresszív heteroszkedasztikus) modellek

Az eloszlások vizsgálata elkülöníthető aszerint, hogy a megfigyelési időponttól független (feltétel nélküli, *unconditional*) vagy pedig attól függő (*conditional*) jelenségről beszélünk. Attól, hogy a megfigyelések *együttes* eloszlása nem teljesíti például a normalitást, elképzelhető (és vizsgálandó), hogy a megfigyelt hozamok különböző megfigyelési időszakokban beleillenek-e a normalitás kereteibe. Vizsgálatukat és összehasonlításukat a megfigyeléseket ekkor az időben változó volatilitással *standardizálva* kell elvégezni. Míg a feltétel nélküli normalitás esetében (zéró várható érték mellett) a standardizált r_t/s alakban kell elvégezni, a feltételes esetben ez a r_t/s_t alakra módosul, feltételezve és megengedve, hogy heteroszkedasztikus piaci folyamatról legyen szó. Míg tehát az időponttól független (*unconditional*) eloszlás alakja nem függ az időponttól és a variancia állandóságát feltételezzük, a feltételes eloszlás (*conditional*) esetében az együttes eloszlás függ az időponttól, a variancia változó, és a folyamatot a heteroszkedaszticitás jellemzi.

Mandelbrot már 1963-as tanulmánya végén szól arról a tapasztalati tényről, hogy a pénzügyi idosorok nem kifejezetten mutatnak stacioner jelleget, azaz nagy abszolút értékű árfolyamváltozást általában ugyancsak nagy, kis abszolút értékű változást relatíve ugyancsak kicsi változások követnek, azaz a másodrendű momentum változik. Ezt azzal magyarázta, hogy az árfolyamgeneráló információk nem egyenletes ütemben érkeznek, és a jelentős információk piaci általi kiértékelése nem történik meg egyetlen lépésben. Ez tartalmi magyarázata lehet a vastag szélek jelenségének.

3.2.1 Normál-GARCH

A GARCH-módszerek bevezetése Engle [1982] (ARCH) és Bollerslev [1986] (GARCH) nevéhez fuzodik.⁴⁹ A modell felállításakor megfigyelt hozamainkat két komponensre bonthatjuk: $r_{t+1} = \mathbf{m} + \mathbf{h}_{t+1}$, ahol \mathbf{m} a hozamok várható értéke (a gyakorlati életben, napi szinten tekinthető zérónak), valamint a \mathbf{h} jelenti az „innovációt” (a várható értéktől való eltérést). A modell az innovációk varianciáját kívánja kezelni (ami napi szinten gyakorlatilag 0 várható érték mellett a hozamok varianciája is egyben). A feltételes variancia az ARCH-modell szerint az utóbbi megfigyelt innovációktól függ, a GARCH pedig ehhez hozzáteszi, hogy a variancia emellett függ az utóbbi feltételes varianciáktól (varianciabecslésektől) is. A GARCH-modellek tehát két egyenlőséget írnak fel: egyet a piaci hozam átlagára, egy másikat a varianciára. Kockázati elemzéseinkben ez a második egyenlet játssza a főszerepet. Voltaképpen a variancia egyenlete egy korábbi variancia értékre autoregresszív (GARCH-tag) és egy reziduumra mozgóátlagolást illesztő tagra (ARCH-tag) bontható. Általános formában a GARCH(p, q) modell:

$$r_t = \mathbf{m} + \mathbf{h}_t$$

$$\mathbf{s}_t^2 = \mathbf{w} + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \mathbf{s}_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \mathbf{a}_i \mathbf{h}_{t+1-i}^2$$

azaz a tárgynapi feltételes variancia becsülhető az utolsó q innováció és az utolsó p feltételes variancia függvényeként. A modellben az \mathbf{a} együtthatók az ARCH-tagokra, a \mathbf{b} együtthatók a GARCH-tagokra vonatkoznak. A kockázatkezelési gyakorlatban elégséges a GARCH(1,1) modellt alkalmazni (Goorbergh, Vlaar [1999]), azaz a becslés tárgya a következő egyenlet:

$$\mathbf{s}_t^2 = \mathbf{w} + \mathbf{b} \mathbf{s}_{t-1}^2 + \mathbf{a} \mathbf{h}_t^2$$

A GARCH-modell segítségével végso soron arra kívánunk becslést adni, hogy a legutolsó hozam alakulásának ismeretében, ugyanakkor figyelembe véve valamilyen szinten a régebbi megfigyeléseinket, *várhatóan* mekkora szintű lesz az átlagtól (0-tól) való eltérés a következő időszakban (napon). A modellre tekintve látható, hogy az miként veszi figyelembe a volatilitások klasztereződését: ha nagy volt a volatilitás az utóbbi napokban, az előrejelzés is magasabb volatilitást fog adni. A volatilitások

gyakran az átlaghoz való visszatérés (*mean reversion*) jelenségét mutatják, azaz relatíve hosszabb távon mindig visszatérnek egy adott szinthez. Amennyiben fennáll, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} < 1$, belátható, hogy ez a konstans szint (Engle, Mezrich, Bielinski [1997]):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{s}_{t+k}^2 | \mathbf{I}_t) = \bar{\mathbf{w}}$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{1 - \mathbf{a} - \mathbf{b}}$$

Amennyiben fennáll, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} < 1$, a feltételes variancia átlaghoz való visszatérést (*mean reversion*) mutat, azonban ha $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 1-hez közeli érték, a sokkhatás hosszú távon fejt ki hatását (*persistence*). Az átlaghoz való visszatérés sebességét az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ összeg határozza meg: minél nagyobb a két faktor összege, egy pillanatnyi sokk annál inkább permanensen gyakorol hatást a volatilitás alakulására, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 1$ esetén pedig tehát a volatilitás *perzisztenciájáról* beszélünk.

A GARCH-modellek paramétereit maximum likelihood módszerrel becsülhetjük, és GARCH(1,1) esetben a

$$l_t(\mathbf{h}_{t+1}) = -\ln \sqrt{2\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \ln \mathbf{s}_t^2 - \frac{\mathbf{h}_{t+1}^2}{2\mathbf{s}_t^2}$$

loglikelihood függvények összegét kell maximalizálni.

Meg kell jegyezni, hogy a GARCH és a kevert normál modellek elméleti szempontból kapcsolatba hozhatók egymással. Az eddig tárgyalt GARCH-modell esetében feltételeztük a normalitást, mivel azonban a volatilitás napról napra változik, a piaci hozamokat úgy tekintettük, mintha számtalan normális véletlen generátorból származnának, tehát végso soron ott is egy fajta normál kevert (*normal-mixture*) jelenségről van szó. Az itt tárgyalt keverteloszlás-modellek azonban idofüggetlenek, tehát ebben az esetben nem lehet a perzisztencia jelenségről beszélni. A normál diffúz modellek esetén más problémával is találkozunk: az ugrások ugyanis nem figyelhetők meg közvetlen módon. A GARCH-modellek esetén a napi hozamokat könnyen standardizálhattuk, hiszen minden napra meg tudtunk határozni egy feltételes volatilitás értéket. Ezzel szemben a normál diffúz esetében nem tudjuk naponta biztosan megmondani, hogy az adott napi megfigyelt hozam éppen az alapfolyamatból vagy az ugrásokat magyarázó

⁴⁹ A modellek szisztematikus leírása megtalálható például Hamilton [1994], illetve áttekintő tárgyalása Mills [1993].

másik folyamatból származik. Abban az esetben, ha kiugró pozitív vagy negatív hozamérték volt megfigyelhető, úgy *érezhetjük*, hogy *valószínűleg* az ugrásos folyamathoz tartozott, de lehet éppen egy adott napi ugrásos érték meglepően kicsi is, hiszen annak a hátterében is egy normális folyamat húzódik (csak a két folyamat keveredését okozza a Bernoulli- vagy Poisson-változó). Így az egyes megfigyelésekre csak valószínűségi becsléseket adhatunk, amint azt a 3.1.3. alfejezet végén láthattuk.

3.2.2 Exponenciális súlyozású mozgóátlagolt variancia

Az exponenciális súlyozású mozgóátlagolás első megközelítésben a mozgóátlagolás olyan módosítása, amikor a megfigyelések időben visszafelé haladva egyre kisebb súlyt kapnak:

$$s_t^2 = \frac{\sum_{s=1}^n I^{s-1} (r_{t-s} - \bar{r})^2}{\sum_{s=1}^n I^{s-1}}.$$

A képlet kifejezi, hogy a legutolsó hozammegfigyelés kapja a legnagyobb súlyt, majd időben visszafelé haladva, egyre kisebb súlyokat adunk az egyes megfigyeléseknek. Legyen a I paraméter $0, \dots, n$ -edik hatványainak az összege S . Ekkor felírható, hogy:

$$\sum_{s=1}^{\infty} I^{s-1} = S, \text{ azaz } S = \frac{1}{1-I}$$

Mindezek figyelembevételével az alapformula átírható egyszerűbb alakra:

$$s_t^2 = (1-I) \sum_{s=1}^n I^{s-1} (r_{t-s} - \bar{r})^2.$$

Belátható továbbá, hogy *végtelen* hosszú visszatekintési periódus esetén a megfigyelési súlyok összege 1, mivel $(1-I) \sum I^{s-1} = (1/S)S = 1$.

Az EWMA-modell jól leírja a piaci folyamatok heteroszkedasztikus jellegét is, így rokon vonások fedezhetők fel a GARCH-modellekkel (Alexander, Leigh [1997]). A variancia becslése (0 várható napi hozamot feltételezve) a következő alakban tehető meg:

$$s_{1,t+1|t}^2 = (1-I) \sum_{s=0}^{\infty} I^s r_{1,t-s}^2 = I s_{1,t|t-1}^2 + (1-I) r_{1,t}^2$$

Az EWMA a GARCH(1,1) modelltől annak az első tagjaként felírt konstansban tér el (ez az EWMA esetében ugyanis zéró). Mint láthattuk, ez a konstans a hosszú távú volatilitás-elorejelzésben tölt be kulcsfontosságú szerepet: amennyiben az átlaghoz való visszatérés (*mean reversion*) jelenség jellemzi az adott időszakot. Az eltérés azonban nemcsak technikai, hanem végső soron elméleti eltérés is, ugyanis nem feltételezünk tovább hosszú távon állandó várható varianciaszintet. Eltunik tehát a hosszú távú volatilitást meghatározó konstans, viszont fennáll az $a + b = 1$ egyenlőség, így az ARCH-tagot $(1 - I)$, a GARCH-tagot pedig I súllyal vesszük figyelembe. Ez, a volatilitást hosszú távon is perzisztens folyamatként jellemző modell olyan *integrált GARCH*-modell, amelynek konstans tagja zéró, így a különböző távra szóló elorejelzések nem konvergálnak valamilyen hosszú távú átlaghoz (Varikooty, et al. [1997]). Az optimális I paraméter egyik lehetséges becslési eljárásakor a következő kifejezést kell minimalizálni:

$$\sum_{t=1}^T \left(\epsilon_{t+1}^2 - \hat{s}_{t+1|t}^2(I) \right)^2 \longrightarrow \min$$

Gyakorlati okból meg kell említenünk, hogy a *RiskMetrics* (J.P. Morgan [1996]) standard a napi VaR-számításra a $I=0,94$, havi becslésre pedig a $I=0,97$ állandó értéket használja a paraméterek újrabecslése nélkül. (A 0,94 érték tehát azt jelenti, hogy az utolsó megfigyelés 6 százalékos, az utolsó előtti $0,94 \times 6$ százalékos, ... súllyal kerülnek figyelembevételre.) Észre kell venni, hogy nagyobb I paraméter esetében nagyobb a visszatekintési időszak, viszont kisebb súlyt kap az utolsó megfigyelés.

3.2.3 Student-GARCH

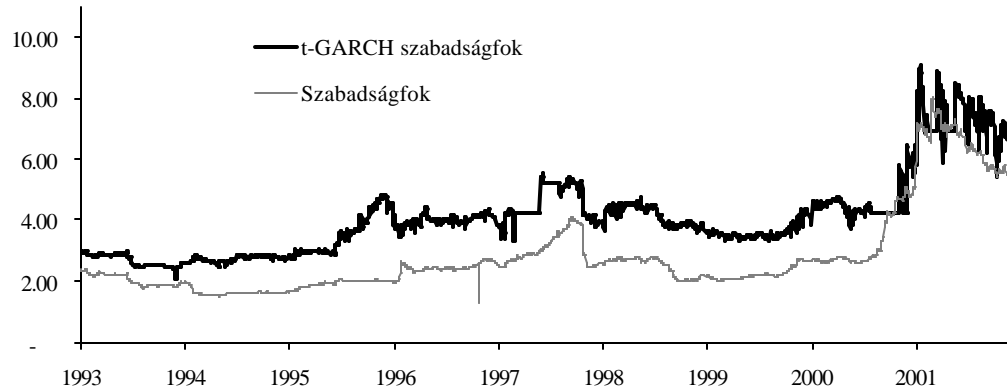
A normális eloszlást feltételező GARCH-modell ugyan jól alkalmazkodik a volatilitás klaszterezettségéhez, de a vastag szélek problémáját még így sem feltétlenül kezeli mindig elég hatékonyan. Ezért célszerű lehet egy olyan GARCH-becslést is végrehajtani, ahol a standardizált innovációk (illetve praktikusán a napi

hozamok) t -eloszlását feltételezzük⁵⁰. Az innovációk optimalizálandó feltételes *loglikelihood* függvénye a következő alakban írható fel:

$$l_t(\mathbf{h}_{t+1}) = \ln \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \mathbf{p}(n-2) - \ln \mathbf{s}_t - \frac{n+1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\mathbf{h}_{t+1}}{\mathbf{s}_t \sqrt{n-2}} \right)^2 \right)$$

2 éves idosorokból naponta újrabecsülve a feltétel nélküli illetve feltételes szabadságfokot láthatjuk, hogy a GARCH-standardizálás közelebb viszi a reziduumokat a normálishoz, mint azt a feltétel nélküli hisztogram alapján sejthetnénk:

47. ábra



3.2.4 GARCH-standardizált stabil eloszlás illesztés

Közelítő megoldási lehetőség, ha a stabil (vagy pl. extrémérték) eloszlást nem a nyers adatokra, hanem azok GARCH-volatilitással standardizált értékeire illesztjük. Számomra némiképp kérdojeles ez a megközelítés, mert a GARCH illesztésekor a normális eloszlással becsüljük a GARCH paramétereket, de tapasztalatilag valóban jól működik (McNeil, Frey [2000]).

Az alábbi illesztést RiskMetrics parametrizálású EWMA volatilitással standardizált hibatagokra végeztem, így nem éltem semmilyen feltételezéssel a GARCH illesztés során. Az ábra az alfa paraméter 1 éves idosorokból naponta történő újrabecslésével készült:

⁵⁰ lásd pl.: Hamilton [1994]

48. ábra

BUXra és EWMA standardizált hibatagokra illesztett alfa időbeli alakulása



Hasonló tapasztalatra juthatunk, mint a t -GARCH esetében: a feltétel nélküli eloszlás helyett a feltételeset tekintve a leptokurtikus jelleg drasztikus változásai tompulnak.

3.3 Több kockázati faktor együttes mérése

Az eddig ismertetett módszerek alkalmazhatóságának sarkalatos pontját a portfóliószintű alkalmazások jelentik – és nem véletlen, hogy az utóbbi egy-két évet leszámítva a publikált kutatási eredmények jórészt *egy* részvény, *egy* index, *egy* deviza elemzését közölték csak. Persze az alternatív eloszlások alkalmazásával nem feltétlenül portfóliószintű VaR-modellt akarunk alkotni, hanem egy jobb minőségű árfolyammodellt kapunk, esetleg a szórást mint kockázati méroszámot kiegészítjük egy kvalitatívabb leptokurtikusságot jelző paraméterrel. Ha például a delta-fedezésre gondolunk, az opció kiírója számára a volatilitás *elméletileg* irrelevánssá válik, hiszen a dinamikus kiigazítással a normális volatilitás által lefedett eseményekkel szemben *immunis*, számára a *kockázatot* a *szakadások*, a *szélsőséges események* jelentik, melyeket nem lehet a hagyományos volatilitással mérni. Hasonlóképpen a későbbiek során bemutatásra kerülő *kopula* (*kapcsolat*) eszközeit nem kell beskatulyázni mint egy új VaR-modellt (szerintem nem is válik azzá belátható időn belül), ugyanakkor a szabályozók tapasztalatot, következtetést szerezhetnek a szektorok közötti globális függőség változásáról, ezáltal a diverzifikáció potenciális romlásáról is.

De milyen módszer alkalmazható a sokdimenziós gyakorlatban? Egy portfóliót ugyanis nem egy, nem kettő, hanem jóval több kockázati faktor határoz

meg. Könnyen alkalmazható a *historikus szimuláció (HS)*, ebben az esetben ugyanis nem kell feltételezéssel élni sem az eloszlásra, sem a függőségi struktúrára, a dimenziószám bátran növelhető. A normál *MC módszerrel* ugyan mind az eloszlásra, mind a függőségre nézve feltételezéssel élünk (elfogadjuk a lineáris korrelációt mint megfelelő kapcsolatméro eszközt), de legalább a nem-lineáris termékek – adott feltételezések mellett – pontosabban kiértékelhetők. A *J.P. Morgan-féle RiskMetrics EWMA kovariancia* módszer rögzített paramétereinek révén szabadon növelhető dimenziószám tekintetében. (A $\lambda=0,94$ -es paraméter nem az 1 dimenzió esetén jelenti a lényegi segítséget, hiszen 1 dimenzió GARCH különösebb nehézségek nélkül illeszthető, de ha 15 dimenziós (ami a gyakorlati oldalról még mindig elég kicsi) struktúrát tekintünk, akkor 15 db variancia, és $15 \cdot 14/2 = 105$ korreláció kiszámítása szükséges. Ez a hagyományos GARCH(1,1) esetén is minimum 360 paraméter (ha nem tekintjük a különböző GARCH folyamatok egymás közötti kapcsolatát...) elméletileg szimultán becslése. Ha ezt még alternatív eloszlással is meg akarjuk fejteni... ehelyett a 0,94-es paramétert becsukott szemmel elfogadjuk, hátha nem vétünk túl nagy hibát.) Mit tehetünk még ezen felül?

- az eloszlást a portfólió egészének hozamaira illesztjük. Ez gyakorlatilag a historikus szimuláció vagyamilyen egydimenziós eloszlásba történő *lapítása*. Homogén termékek esetén (csak részvények) a módszer elméleti szempontból még talán megengedhető, több eltérő faktor (részvény, kamat) esetén ez az „egy dimenzióba történő lapítás” már leginkább csak inter- és extrapolációs technikának nevezhető. Ráadásul az összefüggési struktúra a kovariancia mátrixszal ellentétben fekete doboz marad (mint ahogy valójában a *HS* esetében is az.)
- az aggregált kockázatomérésben, illetve a hozamgörbe-elemzésben elterjedően van a dimenziószám csökkentés, azaz kevés számú független faktort vonunk ki a megfigyelt struktúrából (PCA). Ez egy feltétlenül figyelemre méltó módszer, a hozamgörbe tipikus mozgásai megnevezhetők, modellezhetők. Avagy a dolgozat elején említett példa szerint a kockázatos szektor dimenziószámára (ezáltal közvetetten a diverzifikáltságra) is következtetni tudunk. Azonban két hátránya van: (1) túl heterogén sokaság (nemzetközi portfóliók, kamat, részvény, hitel, ...) esetén a kivonatolt faktorok *egyrészt* nem biztos, hogy lényegesen csökkentik a dimenziószámot, *másrészt* nem biztosan tudunk nekik közgazdasági tartalmat

adni, vagy csak nagyon erőltetetten. (2) ha szigorú szemmel nézzük, a PCA korrelációs struktúrán, azaz elliptikus eloszlásokon alapul. Ha ez után a faktorokra stabil eloszlást illesztünk, elméletileg nem biztos, hogy következetesen járunk el. Itt egy hasonló átváltást érzek, mint sok más esetben – pl. a GARCH-EVT párosítása során – is éreztem. Elméleti oldalról helytelen, statisztikai és kockázatkezelési eredmény (pl. VaR) szempontjából viszont tapasztalat szerint jobb eredményt ad. Mint közelítés talán elfogadható, ha tudatában vagyunk a modell alkalmazása esetleges buktatóinak – az minden esetre egy elony, hogy legalább független faktorokat kezelhetünk, így például a többváltozós GARCH probléma jelentősen leegyszerűsödik (Baum, Bekdache [1996]).

- forgatókönyvelemzés és stressz-teszt. Úgy érzem, itt lehet összehozni a gyakorlatot az elméleti kutatások, módszertanok ismeretével. Stressz-teszt során tipikusan kevés számú faktor szélsőséges mozgásával nyerhetünk képet portfólióink igazi veszendőségéről. Hagyományosan történhet ez (1) historikus adatok (pl. 1987. megfigyelt zuhanása) alapján, (2) megérzés alapján definiált scenáriók szerint (pl. „index le 20% -kal, hozamgörbe fel 10% -kal”). Itt az elemző a kezelhető dimenziószám érdekében – akár nem is tudatosan – faktorszámcsökkentést hajt végre, de nem statisztikai, hanem tartalmi alapon: a legfontosabbnak érzett *közgazdasági* vagy *pénzügyi* faktorok kerülnek megnevezésre, és stresszelésre (miután ezen scenáriók szerint a portfólió is kiértékelésre kerül). Itt két veszélyforrás jelentkezik: kérdés, hogy a történeti szélsőséges adatok valóban jól írják-e le a potenciális stresszhelyzetet, illetve az együttmozgás tekintetében a szubjektív együttes mozgások messze eshetnek a valóságos együttmozgásoktól. A szélsőséges viselkedés azonosításában az eloszlásoknak, a kis dimenziószám melletti függőségek feltérképezésében a *kopula*-knak is lehet szerepük – melyre a piaci stabilitási stresszhelyzetek definiálásakor, és az aggregált kockázat elemzésekor mindenképpen érdemes figyelmet fordítani.

3.3.1 Kovariancia mátrix elliptikus esetben

A kockázatosított érték (VaR) úgynevezett variancia-kovariancia módszerrel meghatározott értéke:

$$VaR = \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}' \mathbf{C} \mathbf{w}}$$

ahol \mathbf{a} a normalitás feltételezése mellett az adott valószínűségi szinthez tartozó szórás-tartomány; $\mathbf{C} = E[(\mathbf{r} - \mathbf{m})(\mathbf{r} - \mathbf{m})']$ módon meghatározott variancia-kovariancia mátrix; \mathbf{w} a portfólió összetételét kifejező vektor. A variancia-kovariancia mátrixnak teljesítenie kell az alábbi feltételeket:

- Szimmetria (ez a számítási eljárás miatt teljesül);
- Pozitív (szemi)definit (ez akkor teljesül, ha a mátrix sajátértékei nem negatívak).

Egy \mathbf{X} mátrix pozitív definit, ha:

$$\mathbf{v}' \mathbf{X} \mathbf{v} > 0$$

bármilyen \mathbf{v} vektorra. Ez a feltétel azért fontos, hogy a portfólió varianciája (vagy VaR értéke) minden esetben pozitív (nemnegatív) legyen. Ezt a tulajdonságot akkor különösen szükséges megvizsgálni, ha nem tapasztalati kovariancia-mátrixot alkalmazunk, hanem pl. szcenárió-elemzéshez mi magunk definiálunk korrelációs struktúrát. Könnyen furcsa helyzetbe kerülhetünk, például a

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.60 \\ 0.95 & 1 & 0.20 \\ 0.60 & 0.20 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix egy könnyen hihető korrelációs struktúrát rejt – amilyent megérzés alapján definiálhatunk, ugyanakkor első sajátértéke -0,0409, azaz nem pozitív definit.

A standard elliptikus Monte Carlo szimuláció⁵¹ során célunk olyan véletlenszámokat előállítani, melyek volatilitásaik és korrelációk vonatkozásában követik a megfigyelt kovariancia mátrixot. Ehhez a kovariancia mátrixból „gyököt” kell vonnunk, azaz meg kell találnunk azt az \mathbf{U} mátrixot, melyre fennáll a $\mathbf{C} = \mathbf{U}' \mathbf{U}$ összefüggés, ahol \mathbf{C} és \mathbf{U} $n \times n$ mátrixok, és n a szimulálandó faktorok száma. A szimulációt az \mathbf{X} $m \times n$ standard normális független véletlen változókat tartalmazó

⁵¹ Általánosabb struktúrák leírását lásd: a kopula fogalmát ismertető alfejezetben.

mátrix segítségével végezzük, ahol m jelöli a generálandó scenáriók számát. A szimulált faktorváltozásokat az $\underline{Y} = \underline{X} \underline{U}$ $m \times n$ mátrix tartalmazza, és belátható, hogy

$$\text{Kovariancia}(\underline{Y}) = E(\underline{Y}'\underline{Y}) = \underline{U}'E(\underline{X}'\underline{X})\underline{U} = \underline{U}'\underline{I}\underline{U} = \underline{U}'\underline{U} = \underline{C}$$

A \underline{C} mátrix felbontása történhet „visszaszámolással”, azaz *Cholesky*-defaktorizációval, vagy sajátérték-dekompozícióval (spektrál dekompozíció). Megoldásra a mátrixok spektráltétele⁵² alkalmazásával juthatunk: ha \underline{C} $n \times n$ szimmetrikus mátrix, ekkor felírható: $\underline{B}^{-1}\underline{C}\underline{B} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ahol λ_i \underline{C} sajátértékei, és \underline{B} i -ik oszlopa \underline{C} i -ik (λ_i) sajátértékéhez tartozó sajátvektora, azaz:

$$\begin{aligned}\underline{B}^{-1}\underline{C}\underline{B} &= \underline{\Lambda} \\ \underline{C} &= \underline{B}\underline{\Lambda}\underline{B}^{-1}\end{aligned}$$

ahol:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{I}_2 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{I}_n \end{bmatrix} \text{ és } \underline{B} \text{ a sajátvektorok mátrixa.}$$

Ez alapján felírható \underline{C} mátrixra:

$$\underline{C} = \underline{B}\underline{\Lambda}\underline{B}^{-1}$$

ahol \underline{L} a sajátértékeket diagonálisan tartalmazó $n \times n$ mátrix, \underline{B} a sajátvektorok $n \times n$ mátrixa és $\underline{B}' = \underline{B}^{-1}$, mivel $\underline{B}'\underline{B} = \underline{I}$. Ez azt jelenti, hogy $\underline{b}_i'\underline{b}_i = 1$ ⁵³ és $\underline{b}_i'\underline{b}_j = 0$, ami alapján $\underline{C} = \underline{B}\underline{\Lambda}\underline{B}'$. Mivel a kovariancia mátrix pozitív definit, elvégezhető a $\underline{\Lambda} = \sqrt{\underline{\Lambda}'}\sqrt{\underline{\Lambda}}$ numerikus gyökvonás, így a kovariancia mátrix felbontása: $\underline{U} = \sqrt{\underline{\Lambda}}\underline{B}'$.

Ellenőrzésképpen belátható, hogy

$$\underline{C} = \underline{U}'\underline{U} = (\sqrt{\underline{\Lambda}}\underline{B}')'(\sqrt{\underline{\Lambda}}\underline{B}') = \underline{B}'\sqrt{\underline{\Lambda}'}\sqrt{\underline{\Lambda}}\underline{B}' = \underline{B}\underline{\Lambda}\underline{B}'.$$

3.3.2 Dimenzió-csökkentés (PCA)

Gyakorlatilag az előbbi felbontáson alapszik a kockázatelemzésben népszerű és már említett fokkomponens-elemzésen (*Principal Component Analysis*) alapuló

⁵²pl. *Sydsaeter, Hammond* [1998]

⁵³A sajátvektorok egység hosszúságúak.

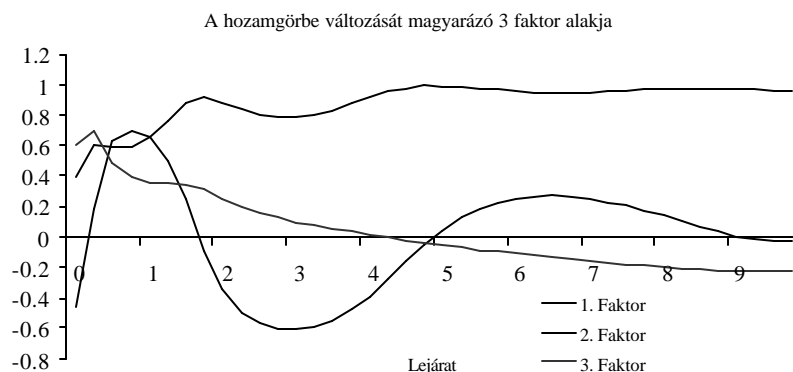
dimenziószám-csökkentés. Ekkor az együttes varianciát legnagyobb mértékben magyarázó faktorok kerülnek kiválasztásra – ha vannak ilyen kitüntetett faktorok. Az adott faktor magyarázóerejét az alábbi hányados fejezi ki:

$$\frac{I_i}{\sum I_i}$$

- Ezáltal a legfontosabb faktorokat kell elemezni, ami módszertani szempontból könnyen kezelhetőek (függetlenek);
- Tartalmi, közgazdasági szempontból a csökkentett dimenziószámú faktortér elonyös, ha tudunk tartalmi magyarázatot tulajdonítani nekik (pl. „részvénypiac”, „deviza”, „hitelkockázati felár”, vagy a hozamgörbe tipikus mozgásai.) Zavaró azonban, ha olyan faktorokat nyerünk ki, amelyeket nem tudunk interpretálni.

A fokonkomenselemzést igen gyakran alkalmazzák a hozamgörbe változásainak elemzésében (*Litterman, Scheinkman* [1991]). Az alábbiakban ezt illusztrálom az amerikai állampapír hozamgörbe elemzési eredményeivel. A megfigyelési időszak: 1997. október 20. – 2001. október 19. A hozamgörbe 80 pontra lett felbontva *spline* interpolációval. Az első faktor a teljes variancia 79%-át, a második további 13%-ot, a harmadik 6%-át, így együttesen 98%-ot magyaráznak, ami elég erős magyarázóerőnek tunik. Az alábbi ábra az első 3 kivont faktor-súlyok alakját mutatja:

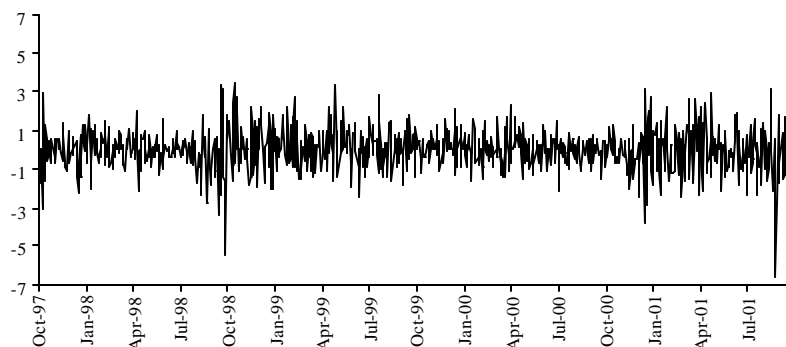
49. ábra



Ezen fokonkomenseket szokták alakjuk révén *eltolás*, *meredekké válás* és *csavarodás* névvel illetni. Az alábbi ábra a visszaszámolt, 1. fokonkomenshez tartozó faktorváltozásokat mutatja:

50. ábra

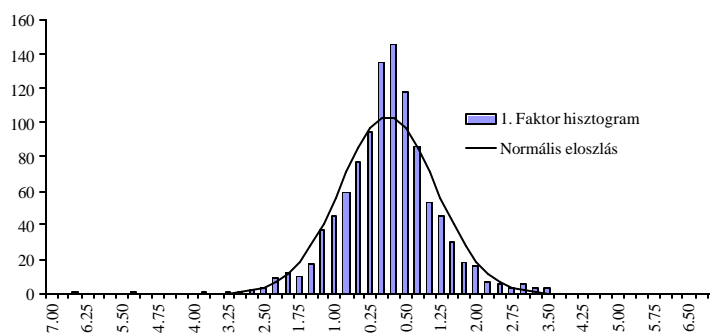
Az 1. Faktor alakulása



Az időszak végi zuhanás (-7 körüli érték) a szeptember 11. utáni hozamgörbe változás, amely erosen túl van a normalitás által elfogadható határon. Tartalmilag ez egyben utal a *biztonságba menekülés* jelenségére.

51. ábra

A hozamgörbe 1. faktorváltozásának histogramja



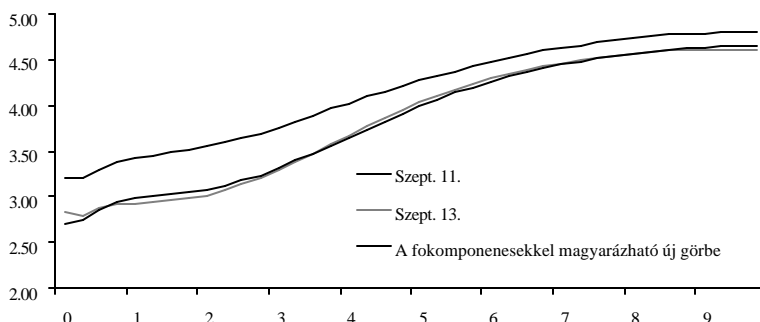
A hozamgörbe adott pontját a fokkomponensek segítségével „stresszelhetjük”, azaz a hozamgörbe y_t pontjának stresszelt vagy szimulált értéke:

$$y'_t = y_t \cdot \exp(\mathbf{s}_t (x_{1,t} \cdot p_{1,t} + x_{2,t} \cdot p_{2,t} + x_{3,t} \cdot p_{3,t}))$$

ha a hozamgörbe változásokat logaritmikusan számoltuk, továbbá $p_{i,t}$ jelöli a t lejáratához tartozó i -ik ($i=1,2,3$) *faktorsúly* értéket, $x_{i,t}$ pedig a stresszelés mértékét. Tekintsük példaként az alábbi, *historikus* megfigyelésen alapuló stresszelemzést:

52. ábra

Fokkomponens alapú amerikai ÁP hozamgörbe stressz-elemzés
(faktorváltozások: -6,6; 2,1; -14,7)



Ugyanakkor szemmértékkel is látható, hogy a faktorértékek GARCH jellegű klaszterezett volatilitást mutatnak, így több szakirodalom a független faktorokon alapuló GARCH-modell alkalmazását tárgyalja⁵⁴, amely a korábban említett okok miatt valóban egy felhasználhatóbb és alkalmazhatóbb többdimenziós kiterjesztése a GARCH-modelleknek a direkt többdimenziós GARCH reprezentációval szemben.

A hozamgörbe mint egy tipikus felhasználási terület mellett egy másik elemzési lehetőséget is felvetek: ha csökken a magyarázó faktorok száma, az egyben egyértelmű utalás a piaci változók egyirányú mozgására, ami tapasztalati bizonyítéka a *diverzifikáltság csökkenésének*. Annak a hipotézisnek a tesztelésére tehát, hogy kockázatos időszakban a *biztonságba menekülés* jelensége miatt a befektetők erosen csak a kockázatos–kockázatmentes szektor megkülönböztetésre koncentrálnak, fokkomponens-elemzést végeztem a magyar részvénytőzsde kiválasztott 12 darab részvényére, melyek: *Danubius, Egis, Fotex, Globus, IEB, Matáv, MOL, NABI, OTP, Pick, Richter, Zalakerámia*.

Két időszakot vizsgáltam a részvények együttes napi hozamalakulása tekintetében, az időszakok szempontjából ugyan önkényes, de heurisztikusan indokolható különválasztást alkalmazva:

- „Stresszes” időszak: 1998. augusztus 1. – 1999. május 1. (9 hónap)

Tapasztalat: A stresszes időszakban az 1. faktor magyarázta a teljes variancia 57%-át, az első 2 faktor pedig a teljes variancia 66%-át. Az összvariancia 72%-át pedig még mindig 3 faktorról lehetett indokolni.

- „Nyugodt” időszak: 1999. május 1. – 2000. február 1. (9 hónap)

⁵⁴ alkalmazhatóságának leírását lásd pl.: Byström [2000]

Tapasztalat: A nyugodt időszakban ezzel szemben az 1. faktor a teljes variancia mindössze 33%-át, 2 faktor 42%-át magyarázta, és 3 faktorról sem lehetett 51%-nál nagyobb hányadot magyarázni, azaz a nyugodt időszakban 3 faktorról nem sikerült ugyanakkora varianciát magyarázni, mint a stresszes időszakban egyetlen eggyel.

A faktorok és az egyedi papírok korrelációját foglalja össze az alábbi táblázat:

7. táblázat

	Stresszes időszak	Nyugalmas időszak	
	1. faktor (57%)	1. faktor (33%)	2. faktor (9%)
MOL	0,866	0,163	0,103
Matáv	0,843	0,204	-0,093
OTP	0,846	0,197	-0,199
IEB	0,624	0,056	0,765
NABI	0,700	0,127	-0,095
Fotex	0,630	0,182	0,242
Pick	0,684	0,133	0,173
Richter	0,826	0,194	-0,184
Egis	0,745	0,143	-0,360
Danubius	0,678	0,141	0,028
Zalakerámia	0,808	0,154	0,174

A harmadik természetes alkalmazási lehetőség a felügyeleti vagy hatósági szintu aggregált kockázatomérés, amikor a pénzügyi rendszert érintő számos kockázati forrás helyett valóban szükséges lehet a kezelhetőség érdekében, illetve a magyarázóerő kiszűrésében és értelmezésében végzett dimenziószám-csökkentés (BIS [1997]).

A többdimenziós nem elliptikus modellek fontosságáról

Minthogy a diverzifikációs hatások becslésekor erőteljesen a lineáris korreláció fogalmára, mértékére hagyatkozunk, pontosan akkor tévedhetünk nagyot, amikor a diverzifikációs hatásra a legnagyobb *szüksége* van a befektetőnek. Így egyfelől számítani kell a vastag szélek jelenségére, de a még nagyobb veszélyt az jelenti, hogy ezek a szélsőséges események *együtt* következnek be, azaz a vastag szélek problémáját a vastag szélek *együttes* problémájává kell kiterjeszteni. Az elliptikus eloszlások kontúrjai levágják ezeket a kicsúcsosodó farkakat, tehát pont ott

„csalnak”, ahol a legnagyobb veszély van. Az $\underline{x} \in R^m$ vektor *körkörös* eloszlású, ha bármely \underline{U} ortogonális transzformációra (Fang et al. [1990]):

$$\underline{x} =_d \underline{U} \underline{x}$$

Az $\underline{x} \in R^m$ vektor *elliptikusan szimmetrikus* eloszlású \underline{m} és $\underline{\Sigma}$ paraméterekkel, ha:

$$\underline{x} =_d \underline{m} + \underline{A}' \underline{y}$$

ahol \underline{y} k dimenziós szférikus eloszlású véletlen változó, $\underline{m}: m \times 1$, $\underline{\Sigma}: m \times m$, k rangú, $\underline{A}: k \times m$ dimenziós mátrix. Ha $\underline{\Sigma}$ pozitív definit, és a másodrendű momentumok végesek, az $\underline{A}' \underline{A} = \underline{\Sigma}$ a korrelációk mátrixa. A körkörös és elliptikus eloszlások a többváltozós standard normális eloszlás kiterjesztéseinek tekinthetők.

A *többdimenziós elliptikus leptokurtikus* eloszlások is csak korlátozottan alkalmazhatók, hiszen pl. ha többdimenziós t -eloszlást illesztünk, a leptokurtikusságot *egyetlen* közös szabadságfok fejezi ki, így ha leptokurtikus jellegükben nagyon eltérő pénzügyi változókat vizsgálunk, míg az egydimenziós illesztések közel pontos képet adhatnak az egyedi változók jellegéről, a többdimenziós eloszlás egyetlen szabadságfokban sűríti ezt az információt, és ezáltal biztos információt veszünk.

3.3.3 Feltételes korreláció

Az első lehetséges modell még teljesen elliptikus alapokon nyugszik. A kevert normál modell többdimenziós kiterjesztése rugalmas elemzéseket tesz lehetővé, különösen, hogy magát a korrelációt is feltételessé tehetjük (Kim, Finger [2000]). Ha két eszköz, x és y együttes ugrásos folyamatát akarjuk leírni, az alábbi modellt állíthatjuk fel:

$$(x, y) \sim \left\{ \begin{array}{l} MVN \left(\begin{bmatrix} \underline{m}_{x1} \\ \underline{m}_{y1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{s}_{x1}^2 & \underline{s}_{x1} \underline{s}_{y1} \underline{r}_1 \\ \underline{s}_{x1} \underline{s}_{y1} \underline{r}_1 & \underline{s}_{y1}^2 \end{bmatrix} \right) | 1 - I \\ MVN \left(\begin{bmatrix} \underline{m}_{x2} \\ \underline{m}_{y2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{s}_{x2}^2 & \underline{s}_{x2} \underline{s}_{y2} \underline{r}_2 \\ \underline{s}_{x2} \underline{s}_{y2} \underline{r}_2 & \underline{s}_{y2}^2 \end{bmatrix} \right) | I \end{array} \right\}$$

A két komponensű modell illesztésére a szerzők a következő technikát javasolják. Válasszunk egy x kulcsfontosságú változót (pl. a tozsdeindexet), és ahhoz párosítsuk a további y pénzügyi faktorokat, azaz így például *tozsdeindex plusz egyéb* (kamat,

hitelkockázati felár, deviza, másik index, stb.) faktor-páronként végezhető stressz-elemzés. Elso lépésben a kulcsfaktor 2 komponensű kevert normál eloszláshoz történő illesztése történik, az egydimenziós esetről leírta k szerint. Amint tárgyaltuk, Bayes-i szabály alapján valószínűségi becslést adhatunk arra vonatkozóan, hogy az adott napi megfigyelés a nyugodt, vagy az ugrásos naphoz tartozott. Ha az x és az y eszközök között feltételes lineáris kapcsolatot feltételezünk⁵⁵:

$$\frac{y_t - \mathbf{m}_y}{\mathbf{s}_y} = \mathbf{r} \frac{x_t - \mathbf{m}_x}{\mathbf{s}_x} + \sqrt{1 - \mathbf{r}^2} \mathbf{e}_t$$

Ez gyakorlati példával úgy illusztrálható, hogy ha ismerjük a BUX adott napi hozamát, az adat ismeretében *feltételes* becslést adhatunk pl. a MOL részvény azonos napi teljesítményére (amelyet a gyakorlatban a béta-paraméter segítségével teszünk meg.) Az x eszköz ismeretében az y feltételes várható értéke:

$$E[y_t | x_t] = \mathbf{m}_y - \frac{\mathbf{r} \mathbf{s}_y}{\mathbf{s}_x} \mathbf{m}_x + \frac{\mathbf{r} \mathbf{s}_y}{\mathbf{s}_x} x_t$$

A hektikus és nyugodt időszakhoz tartozó *feltételes valószínűségek* ismeretében becslést adhatunk a kétdimenziós kevert normál modell második („periférikus”) eszközének feltételes volatilitására és a két eszköz közötti feltételes korrelációkra. Ha I az ugrásos nap *feltétel nélküli valószínűsége*, a y eszköz t napi x_t hozamának megfigyelése alapján az ugrás feltételes valószínűsége:

$$\mathbf{a}(x_t) = \frac{I f(x_t | \mathbf{m}_{x2}, \mathbf{s}_{x2}^2)}{(1 - I) f(x_t | \mathbf{m}_{x1}, \mathbf{s}_{x1}^2) + I f(x_t | \mathbf{m}_{x2}, \mathbf{s}_{x2}^2)}$$

Ezután az y eszköz hektikus időszakbeli feltételes várható értéke a hivatkozott cikkben írtak szerint torzítatlan becslést ad:

$$I \mathbf{m}_{y2} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{a}(x_t) y_t$$

mivel $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{a}(x_t)$ a I -nak torzítatlan becslését adja. Hasonló megfontolással becsülhetők a további paraméterek, így a hektikus idoszakra jellemző feltételes korreláció is:

⁵⁵ Megj.: az alábbi formula tulajdonképpen azonos a 2 dimenziós Cholesky-formulával.

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^N a(x_t)(x_t - m_{x2})(x_t - m_{y2})}{s_{x2}s_{y2} \sum_{t=1}^N a(x_t)}$$

A korrelációk becslését a cikk szerzői Monte Carlo szimulációval ellenőrzik, amikor is 2 eszköz megfigyelt paraméterei alapján szimuláltak *feltétel nélküli egyszerű normál* scenáriókat, és az így visszaszámított korrelációkat vetették össze a hektikus feltételes korrelációkkal adott szignifikancia szinten történő egy intervallumba esés szerint. A számítások után egy másik tesztet is érdemes elvégezni, mely szerint a második periférikus eszköz is kevert normális eloszlást követ:

$$y_t | x_t \sim \begin{cases} N(m_{y1t}, s_{y1t}^2) | 1 - a(x_t) \\ N(m_{y2t}, s_{y2t}^2) | a(x_t) \end{cases}$$

ahol

$$m_{y1t} = r_1 \frac{s_{y1}}{s_{x1}} (x - m_{x1}) + m_{y1}$$

$$s_{y1t}^2 = s_{y1}^2 (1 - r_1^2)$$

és a m_{y2t} illetve s_{y2t}^2 hasonlóképpen kerül számításra. A cikk szerzői ezt a tesztet is MC módszerekkel végezték.

A fenti modellezéshez hasonló megfontoláson alapuló eljárást tárgyal *Quian és Goman* [2001] is, akik a stressz-elemzést a volatilitás módosításával kezdik. Azaz az elemző a stressz-szenáriót a kovarianciamátrix valamely *volatilitásának* módosításával (stresszelésével) kezdi. Ami cikkükben lényegi fontosságú, hogy felhívják a figyelmet arra a tényre, hogy a volatilitások és korrelációk összefüggésben állnak egymással – gyakorlatilag egyfajta magyarázatot adva a stresszhelyzetekben valóban tapasztalható *korrelációnövekedésre*. Ha 2 eszköz kétváltozós egyszerű normáloszlást követ:

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \sim N \left[m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \middle| \Sigma = \begin{bmatrix} s_1^2 & r s_1 s_2 \\ r s_1 s_2 & s_2^2 \end{bmatrix} \right]$$

akkor a r_1 r_2 -re vetített *feltételes* eloszlása:

$$r_1 \sim N \left[m_1 + \frac{r s_1}{s_2} (r_2 - m_2), s_1^2 (1 - r^2) \right]$$

Ha az elemző a volatilitást változtatni akarja, azaz $\mathbf{s}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{s}}_i$, az egyensúly fennállásához figyelembe kell vennie a feltételes eloszlás varianciájára fennálló összefüggést⁵⁶:

$$\frac{\tilde{\mathbf{s}}_1^2 - \mathbf{s}_1^2}{\mathbf{s}_1^2} = r^2 \frac{\tilde{\mathbf{s}}_2^2 - \mathbf{s}_2^2}{\mathbf{s}_2^2}$$

így tehát a volatilitás növelése a másik tag volatilitás növekedését:

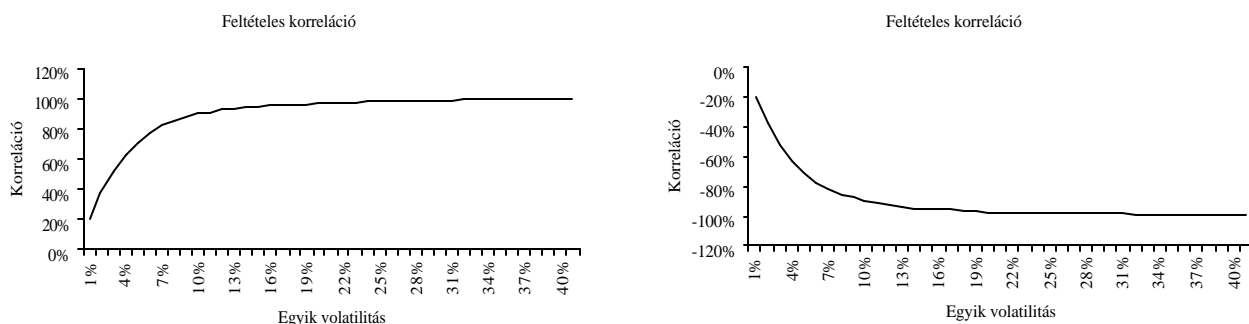
$$\tilde{\mathbf{s}}_1^2 = \mathbf{s}_1^2 \left[1 + r^2 \left(\left(\tilde{\mathbf{s}}_2 / \mathbf{s}_2 \right)^2 - 1 \right) \right]$$

és a *korreláció változtatását* is igényli:

$$\tilde{r} = r \frac{\tilde{\mathbf{s}}_2 / \mathbf{s}_2}{\sqrt{1 + r^2 \left(\left(\tilde{\mathbf{s}}_2 / \mathbf{s}_2 \right)^2 - 1 \right)}}$$

azaz pozitív korreláció és volatilitás növekedése mellett a *korrelációt is növelni kell*, negatív korreláció esetén pedig csökkenteni.

53. ábra



Ez egybecseng a válsághelyzetek idején tapasztalható, kockázatos szektorok közötti korreláció növekedéssel, illetve a „menekülés a biztonságba” jelenségével, azaz a kockázatos és kockázatmentes szektorok közötti korreláció erős negatívvá válásával.

Az alábbi ábra ezt a módszert illusztrálja. 80% valószínűséggel nyugodt, mindkét eszközre napi 0% várható hozamot, az egyik eszközre 2%, a másikra 3% volatilitást és 30% korrelációt feltételeztem. Az esetek 20%-ában azonban az első termék volatilitása 7%-ra ugorhat, ami a 2 dimenziós feltételes normalitás mellett a

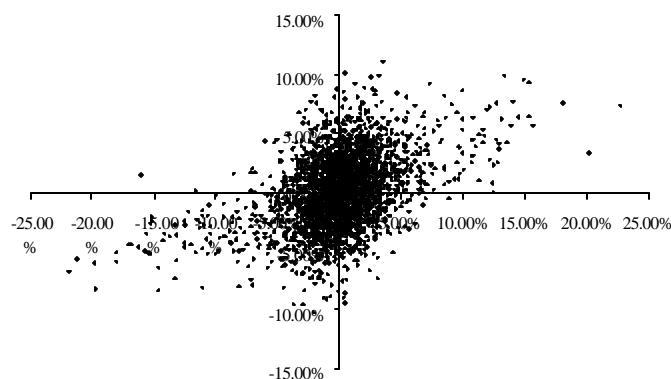
⁵⁶ Azonos logika lapján, mint:

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_1}{\mathbf{s}_1} = r \frac{\tilde{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{u}_2}{\mathbf{s}_2}$$

másik eszköz volatilitásának 3,15%-ra emelkedésével és a korreláció 74%-ra ugrásával jár. A várható értékeket változtatlanul hagytam.

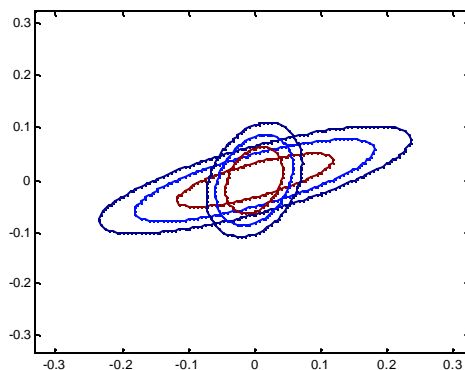
54. ábra

2 dimenziós kevert normál szimuláció feltételes korrelációval



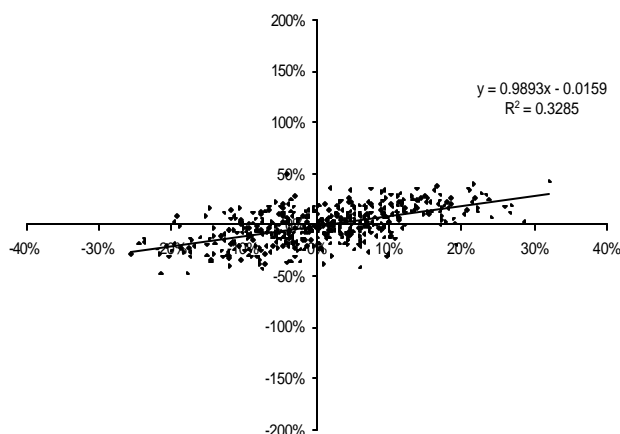
A szimuláción látszik, hogy a pontfelho nem elliptikus alakú, hanem a farkok mentén elnyúlik. Az alábbi ábra az előbbi szimuláció két, önmagában normális elliptikus kontúrjait mutatja, melyből a fenti szimulált pontfelho került „kikeverésre”.

55. ábra



Végül még egy illusztrációval zárom ezt az alfejezetet. Az induló helyzetet ($s_1=10\%$, $s_2=20\%$, $r=50\%$) az alábbi szimulált pontfelho ábrázolja:

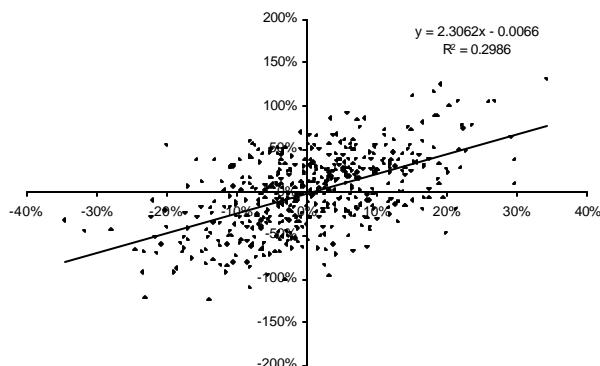
56. ábra



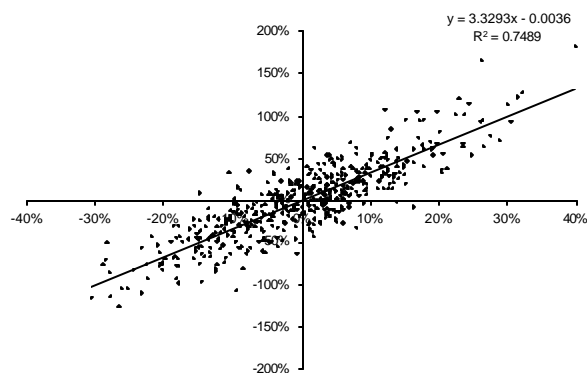
Az induló állapot után a második változó volatilitását 50%-ra növeltem. A következő két ábra újabb szimulált pontfelhőket mutat – az első esetben a korrelációt és s_I -et a változatlanul hagytam, a második esetben viszont módosítottam ezen paramétereket a fenti összefüggések alapján):

57. ábra

Feltétel nélküli



Feltételes ($s_I=13\%$, $r=82\%$)



Mi a helyzet azonban akkor, ha (1) a több dimenziós struktúrán a korreláció nincs értelmezve, (2) nem kevert eloszlással, hanem egy feltétel nélküli eloszlással akarunk árfolyammozgást leírni vagy (3) esetleg nem elégszünk meg a páronkénti kapcsolatok mérésével, hanem *globális függőséget* szeretnénk mérni? Ez a 3 ok elegendő ahhoz, hogy a módszertanba legfrissebben beépült fogalomkört is tárgyaljam a módszertani áttekintés befejezéséeként.

3.3.4 Általános többdimenziós struktúrák (student-Kopula)⁵⁷

Amíg a vastag szélű eloszlások kutatási eredményei több évtizedes gyökerekből táplálkoznak, a többdimenzionalitás terén a „kopula” (*kapcsolat*) fogalma rendkívül új koncepció. A számomra ismeretes első pénzügyi vonatkozású említése 1999-ből származik (*Embrechts, McNeil, Strauman* [1999]) ugyanakkor már a kockázatkezelési *alapirodalom* is említi, konkrétan mint az extrémérték-elmélet páronkénti illetve többdimenziós továbbfejlesztési lehetőségét (*Lore, Borodovsky (szerk.)* [2000], 8. fejezet.). Noha hirtelen gyorsasággal számos publikáció jelent meg ebben a témában, ugyanakkor én megpróbálok csak a legfontosabb tulajdonságokra és a lehetséges közgazdasági tartalomra szorítkozni.

Az alapvető probléma, hogy a többdimenziós struktúrák leírására általánosan alkalmazott *lineáris korreláció* csak korlátozottan alkalmas. Ennek okai:

- többdimenziós normalitási koncepción alapszik;
- véges variancia esetén értelmezett, így a stabil eloszlások elemzésére alkalmatlan;
- a zéró lineáris korreláció *függetlenségre* utal, holott ez egyáltalán nem jelent *függetlenséget* is egyben (pl. a négyzetes összefüggést már nem jelzi, vagy a többdimenziós *t*-eloszlás esetében a zéró korreláció mellett sem beszélhetünk a változók függetlenségéről, hiszen azok egy *normál* változó, illetve egy *közös c*-eloszlású változó hányadosaiként kerültek definiálásra – jelen alfejezet szempontjából pont a közös nevezőnek a szabadságfoka mint a globális függőség kifejezésére alkalmas egyik lehetséges paraméter játssza a kulcsszerepet);
- csak páronkénti kapcsolatokat mérhetünk vele, egy sokaság szimultán összefüggését nem.

Egy kopula-n az m dimenziós, $(0,1)$ egyenletes eloszlású peremekkel rendelkező valószínűségi vektor eloszlásfüggvényét értjük (*Embrechts et al.* [1999]). Más szavakkal a $C : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$ függvény *kopula*, ha

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_m)$ szigorúan monoton minden u_j -re;

⁵⁷ ez a rész közös tanulmányunk felhasználásával készült, lásd: *Benedek, Kóbor, Pataki* [2002]

2. $C(1, \dots, u_j, \dots, 1) = u_j$ minden $j=1 \dots m$ -re, $u_j \in [0, 1]$;
 3. Bármely $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in [0, 1]^m$ vektorra, ahol $a_j \leq b_j$,
- $$\sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_m=1}^2 (-1)^{j_1 + \dots + j_m} C(u_{1j_1}, \dots, u_{mj_m}) \geq 0, \text{ ahol } u_{k1} = a_k, u_{k2} = b_k, k=1, \dots, m.$$

Sklar tétele (idézi: *Bouyé, Durrleman, Riboulet, Roncalli* [2000]) szerint folytonos függvények esetében az egyváltozós peremek és a többváltozós függőségi struktúra szétválasztható, és ezt az együttes többváltozós struktúrát reprezentálhatjuk a *kopula*-val, mely szerint ha H egy m -változós eloszlásfüggvény F_1, \dots, F_m peremekkel, ekkor létezik egy m -dimenziós C kopula, melyre

$$H(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m))$$

és megfordítva, ha C egy m -változós kopula, és F_1, \dots, F_m folytonos eloszlásfüggvények, akkor H egy m -változós eloszlásfüggvény F_1, \dots, F_m peremekkel. Bár sok függvény megfelel a kopula-tulajdonságnak, én csak a t -kopula-ra szorítkozom⁵⁸ (mely magas szabadságfok esetén gyakorlatilag a *Gauss*-i kopula alakját veszi fel). Egy m -dimenziós *student* kopula definíciója (*Embrechts, McNeil, Strauman* [1999]):

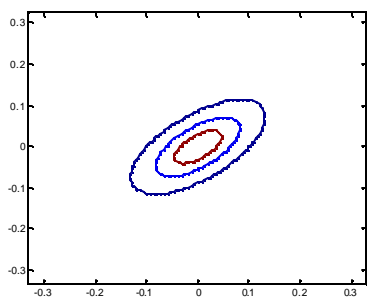
$$C_T(u) = \int_{-\infty}^{x=u_1^{-1}} \dots \int_{-\infty}^{x=u_m^{-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{|\Sigma|} (np)^m} \left(1 + \frac{\underline{x}' \Sigma^{-1} \underline{x}}{n}\right)^{-\frac{n+m}{2}} d\underline{x}$$

Tartalmilag a *kopula* alkalmazása úgy interpretálható, hogy *első* lépésben a peremek paramétereit egymástól függetlenül becsüljük, majd ezt követően húzunk rájuk egy közös összefüggési struktúrát. Az eltérést vagy többlet információt a többdimenziós normál eloszláshoz képest kontúrokon keresztül érzékeltetem. Az (1) ábra a többdimenziós normál eloszlással rendelkező *elliptikus* kontúrokat mutatja, a (2) ábrán a többdimenziós t -eloszlással vastagabb szélű, de továbbra is elliptikus kontúrokhöz jutunk. A (3) ábra a kopula felbontással kapott általánosabb kontúrokat ábrázolja.

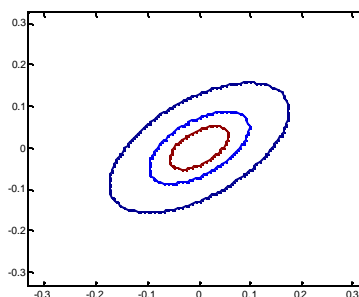
⁵⁸ *Durrleman, Nikeghbali, Roncalli* [2000] módszertani megoldást kínál több lehetséges kopula közül az empirikusan legjobban illeszkedő kiválasztására.

58. ábra

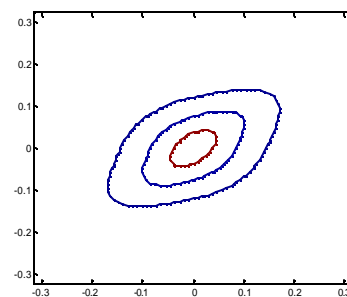
(1)



(2)

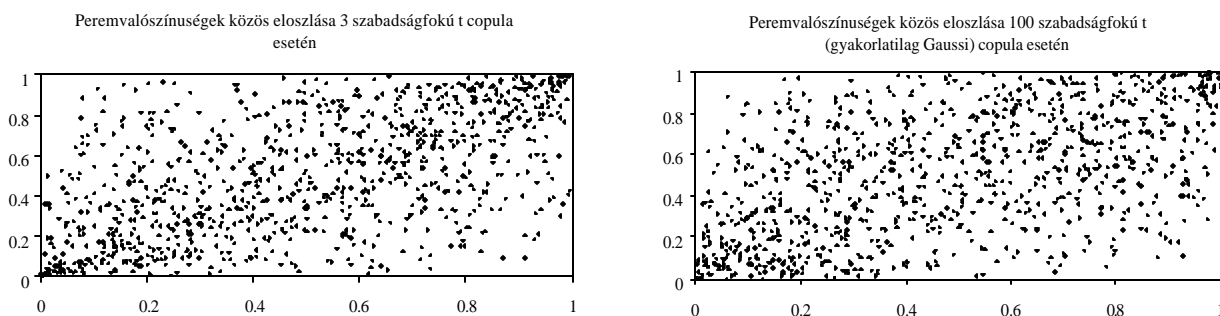


(3)



Noha dolgozatomban csak a t -kopula-t tárgyalom, még egyszer hangsúlyozom, hogy nem az egyetlen, hanem számos kopula-modell alkalmazási lehetősége kínálkozik – a szakirodalom (*Bouyé et al.* [2000] pp. 41) azonban ezt mint a pénzügyi elemzésekben egyik legjobb lehetőséget ajánlja.

Az alábbi ábra – amely egyben magának a kopula-nak mint összefüggési struktúra fogalmának a megértéséhez is közelebb visz – 2 azonos lineáris korrelációjú és azonos peremeloszlással rendelkező változójának a visszaszámolt valószínűségeit ábrázolja. Az ábrákon a változó párok peremvalószínűségei egymás függvényében kerültek ábrázolásra. Talán jól érzékelhető, hogy az első esetben a pontok jobban összehúznak, jobban koncentrálnak a sarkakon (közös szélsőséges eseményeknél), mint a jobb oldali ábrán. Ennek az a tartalmi jelentősége, hogy bár azonos peremekkel és korrelációval jellemezhetők, az első esetben *sokkal gyakrabban következik be közös szélsőséges esemény, közös esés*, mint a másodikban, azaz az első esetben a *diverzifikációs hatás* gyengébb az extrém események bekövetkeztekor.



Az első esetben a mögöttes függőségi struktúrát jelölő t -kopula alacsonyabb szabadságfokú, mint a másodikban⁵⁹. Ez vezet el minket a *globális függőségi* méroszám megértéséhez: a t -kopula, szemben sok más kopula-moddal, nemcsak kétváltozós, hanem sokváltozós esetben is illeszthető⁶⁰, így például a fejezet végén 3 dimenziós esetre rajzolom ki a szabadságfokot, amely jelen esetben a globális paraméter, és a várt eredményt kapjuk: *alacsonyabb szabadságfok stresszesebb időszakot jellemez, a közös zuhanások gyakrabban fordulnak elő, mint azt a normalitás mellett feltételezhetnénk*.

A t -peremekkel rendelkező t -kopula illesztésekor a következő lépéseket követtem⁶¹ (ez a „ t -perem és t -kopula” párosítás egyébként nem szükségszerű, de a vastag szélek és közös szakadások *statisztikai* modellezésének céljára praktikus):

1. elvégeztem a peremek külön-külön önálló ML becslését (azonos módon, mint azt az 1 dimenziós elemzés során tettük)
2. a megfigyelt r_1 és r_2 hozamokat, becsült eloszlásparamétereik segítségével F mint t -eloszlás-transzformációval $(0,1)$ egyenletes eloszlású p_1 és p_2 értékekké transzformáltam, azaz $p_i = F(r_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{g}_i)$
3. ML optimalizációt hajtottam végre 2 dimenziós t -kopula–suruségfüggvényre, melynek input változói $u_1 = F^{-1}(p_1, \mathbf{n})$ és

⁵⁹ Embrechts, McNeil, Strauman [1999] cikkéből kiderül, hogy az eloszlásszélek függősége a szabadságfok csökkenő függvénye.

⁶⁰ Ugyanakkor rögtön egy megjegyzés: tapasztalataim szerint 4-5 dimenziós esetig sikerült szignifikánsan illeszteni, magasabb dimenziószámokban elenyésző esetben találtam konkrét idosorokon szignifikánsnak.

⁶¹ 2 dimenziós esetben EVIEWS-ban tudtam írt programommal meg tudtam oldani a becslést, magasabb dimenziószám esetén közös dolgozatunkhoz a Pataki Attila Ph.D. kollegám által írt

$u_2 = F^{-1}(p_2, \mathbf{n})$ ahol \mathbf{n} a közös struktúra szabadságfoka. Az m -dimenziós t -kopula suruséggfüggvénye (lásd pl.: *Bouyé et al.* [2000] pp. 17.):

$$c_T(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mathbf{n} + m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{n}}{2}\right) \sqrt{|\Sigma|} (\mathbf{n} \mathbf{p})^m} \left(1 + \frac{\underline{x}(\underline{u})' \underline{\Sigma}^{-1} \underline{x}(\underline{u})}{\mathbf{n}} \right)^{-\frac{\mathbf{n} + m}{2}} |J(\underline{u})| d\underline{u}$$

A kopula alapú kockázatkezelés illusztrációjára tekintsük az OTP és a MOL részvények 4 éves idosorát. A két részvény együttes napi hozamait ábrázolja a 60. ábra bal felső negyede. Kockázatelemzéskor, ha MC szimulációs módszerrel élünk, igény szerint hasonló pontfelhőhöz kell jutnunk. A szimulációra három megoldást mutatok be.

1. A jobb felső ábra mutatja a *normális eloszláson* alapuló scenáriókat, tehát azt, amelyet a standard MC módszerrel el tudnánk érni. Míg a tapasztalati eloszlásban láthatjuk, hogy számos esetben előfordul olyan nap, amikor mindkét részvény vesztesége túllépi az egyenkénti -10%-ot, a szimulációk során egyszer sem jutunk ilyen esethez. A 2 dimenziós normális eloszlás paraméterei: $\mathbf{s}_{MOL}=2,73\%$, $\mathbf{s}_{OTP}=3,14\%$, $\mathbf{r}=62,4\%$.

A szimuláció menete a Chole sky-felbontást alkalmazva:

$$r_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{s}_1, \quad \text{ahol } \mathbf{e}_i \text{ standard normális szimulált változó, és}$$

$$r_2 = \mathbf{s}_2 \left(\mathbf{r} \mathbf{e}_1 + \sqrt{1 - \mathbf{r}^2} \mathbf{e}_2 \right)$$

2. Helyettesítsük a normális eloszlásunkat többdimenziós vastagszélu eloszlással, amely könnyű kezelhetősége miatt legyen a t -eloszlás⁶². A bal alsó ábra mutatja a szimulált scenáriókat, melyek szemmel láthatóan jobban

algortimust használtam. A becslési leírás: *Benedek, Kóbor, Pataki* [2001] pp. 8-9, illetve az illeszkedés-vizsgálat leírása pp. 10-11.

⁶² az n -dimenziós t -eloszlás suruséggfüggvénye, (lásd: *Fang et al.* [1990] pp. 85):

$$\frac{\Gamma((n + \mathbf{n})/2)}{(\mathbf{p} \mathbf{n})^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\mathbf{n}}{2}\right)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \mathbf{n}^{-1} (\underline{x} - \underline{\mathbf{m}})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x} - \underline{\mathbf{m}}) \right)^{-\frac{n + \mathbf{n}}{2}}$$

ahol n a dimenziószám, \mathbf{n} a közös szabadságfok, $\underline{\mathbf{m}}$ a várhatóérték vektor és Σ a kovarianciamátrix, amely nem azonos a tapasztalati kovarianciamátrixszal (lásd: t -eloszlás terjedelmi paramétere illetve a szórás kapcsolatát)

A 2 dimenziós eloszlást Eviews-ban ML módszerrel illeszttem, de a kényelmes mátrix forma helyett ki kellett fejteni a suruséggfüggvény paramétereit. 3 dimenziós esetben az E-VIEWS-zal már nem sikerült illesztést végezni.

közelítik a szélsőséges eseményeket. Az eloszlás paraméterei: $n=3,6$, $g_{MOL}=1,85\%$, $g_{OTP}=2,05\%$ és $r=56,7\%$.

A szimuláció menete a következő volt:

$$c = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad r_1 = g_1 \frac{h_1}{c/\sqrt{n}} \quad \text{illetve} \quad r_2 = g_2 \frac{h_1 r + h_2 \sqrt{1-r^2}}{c/\sqrt{n}}$$

ahol e_i és h_i standard normális véletlen változókat jelöl.

3. A jobb alsó sarokban található a t -peremekkel és t -függőségi struktúrával felírt kopula szimuláció. Nem véletlenül ebben az esetben kapjuk a legjobban hasonlító pontfelhőt, hiszen itt a peremekre illetve a függőségi struktúrára külön felírást alkalmazunk.

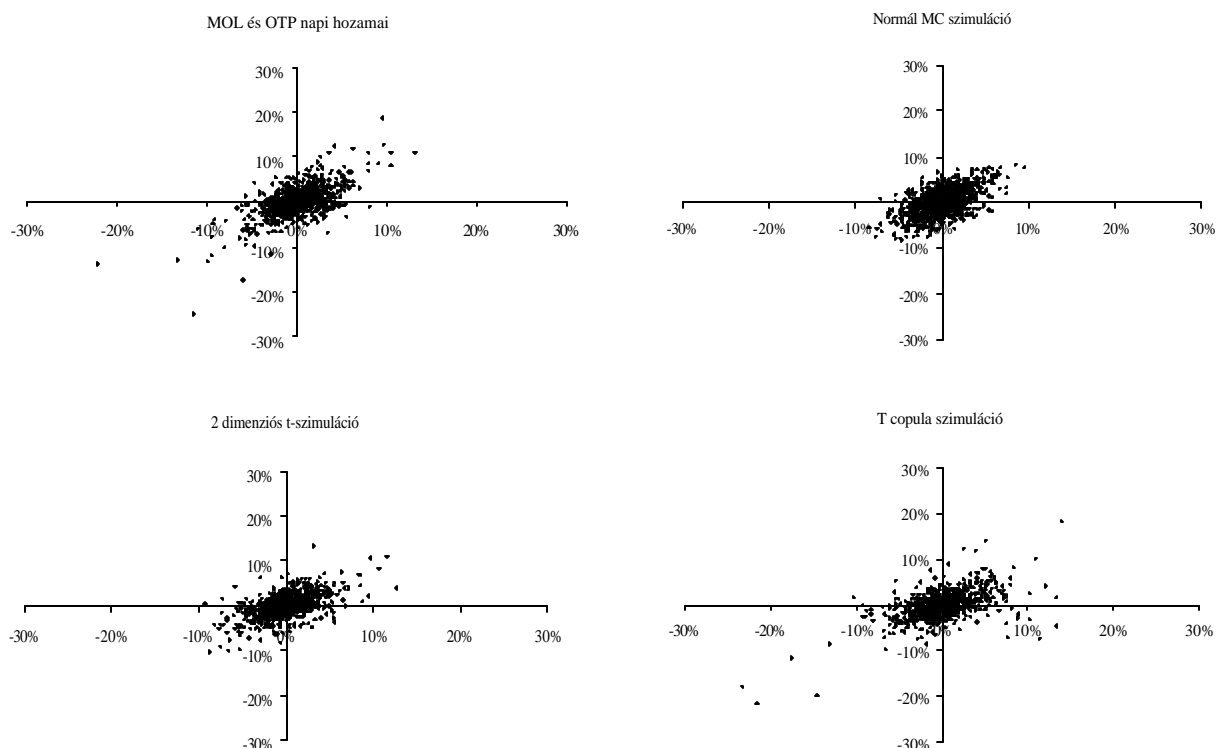
A kiinduló paraméterek: 1. perem: $n_{MOL}=3,6$, $g_{MOL}=1,87\%$, a 2. perem: $n_{OTP}=2,99$, $g_{OTP}=1,94\%$, a függőség: $n=3,2$, $r=56,6\%$.

A szimuláció menete:

1. lépésben a függőségi struktúra n paraméterének (szabadságfok) és megfelelő r -nak megfelelő 2 dimenziós t eloszlású változókat generálunk. (Lényegében azonos lépések, mint az előző esetben, ahol 2 dimenziós t -eloszlást kellett szimulálnunk.) Így tehát t_1 és t_2 korrelált t -eloszlású változókat kapunk.
2. lépésben meghatározzuk $p_1=F(t_1, n)$ és $p_2=F(t_2, n)$ valószínűségeket, ahol F jelöli a t -eloszlás eloszlásfüggvényét, és v a kopula szabadságfoka.
3. lépésben jutunk el a szimulált hozamokhoz: $r_1 = g_1 F^{-1}(p_1, n_1)$ illetve $r_2 = g_2 F^{-1}(p_2, n_2)$ ⁶³

⁶³ Az ábrán látható pontfelhő visszszámolt paraméterei: függőség 3,73 és 55,4%, 1. perem: 3,92 és 1,84, 2. perem 2,91 és 1,85.

60. ábra



A t -kopula alapú Monte Carlo szimulációról és VaR-számításról több tanulmány is közöl kedvező tapasztalatokat (különösen részletes leírás olvasható: *Glasserman et al.* [2000]). Felmerülhet persze a kérdés, hogy miért ilyen gyorsan és határozottan a Monte Carlo szimulációs technika mellett tettük le a voksunkat a kopula alkalmazása kapcsán. Ennek két oka van:

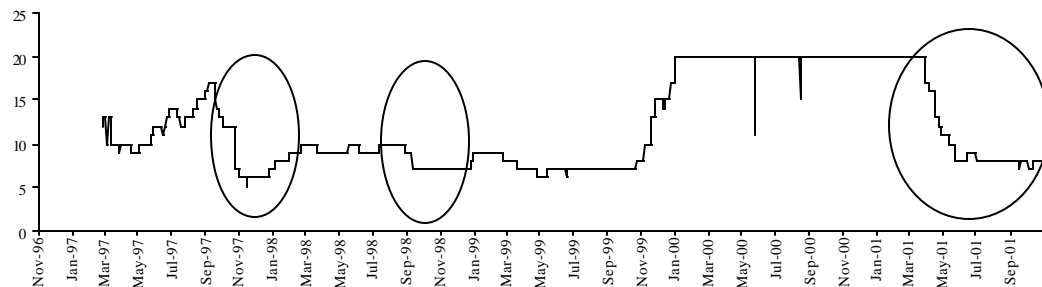
- Nem tudunk olyan forrásanyagról, ahol analitikusan invertálták volna a t -kopula-t, s noha lehetséges, hogy ez a kérdés megoldható, egészen bizonyosan nem könnyen kezelhető analitikus formulára jutunk.
- A másik jelentős ok a nem-lineáris pozíciók esete. Még ha analitikusan meg is kaphatjuk az inverzfüggvényt, az imént hivatkozott szerzők megmutatják, hogy nem-normális eloszlás alkalmazásakor (pl. t -eloszlás) derivatív pozíciók esetén a másodfokú Taylor-sor alapú δ - γ közelítés egyszerűen nem működik!

Ugyanakkor, ahogy a vastag szélű eloszlásoknál sem kizárólag a szimulációra vagy a VaR számításra szorítkoztam, tekintsünk egy illusztrációt arra, hogy miként fogható fel a *kopula* mint globális függőséget mérő eszköz. A *kopula* globális paramétere mint piacok globális függőségi paramétere (jelen esetben a mögöttes t -

eloszlás *szabadságfoka*) az alábbi ábrán kerül illusztrálásra, 250 napos csúszóablakok alapján:

61. ábra

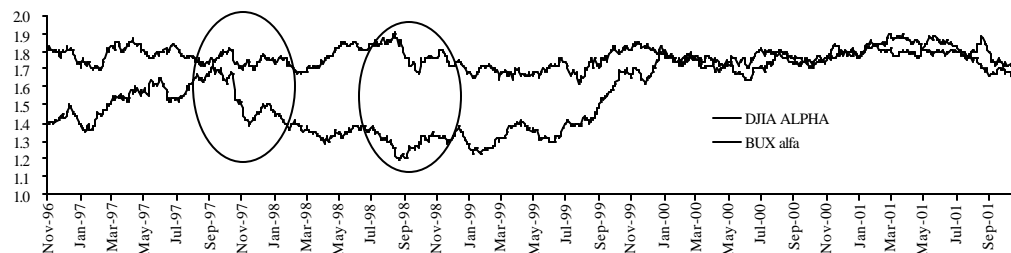
DJIA, NIKKEI, BUX kopula



Három, egymástól földrajzilag igen távol eső tőzsde indexének függősége a válságidoszakokban megváltozik. Amint azt korábban már említettem, az együttesen szélsőséges, szakadásos időszakokban (1997 őszi, 1998 őszi, 2001 őszi) a függőségi paraméter értéke szűkül, elliptikussabb időszakokban tágul. Tulajdonképpen egy hasonló tartalmú ábrát nyerhetünk egyetlen indexszel több dimenzióra, mintha peremenként az eloszlásparamétereket vizsgálnánk:

62. ábra

Indexek karakterisztikus exponensei



A *kopula* kockázatelemzésben történő alkalmazhatóságára sokan felfigyeltek, és nemcsak a *piaci*, hanem jelentős módon a *hitel-* vagy *működési* kockázat elemzésében is alkalmazási teret nyerhet (Bouyé et al. [2000]).

3.4 Az ismertetett módszerek empirikus és tartalmi összehasonlítása

Zárásként röviden összegzem az ismertetett kvantitatív módszerekkel kapcsolatos tapasztalataimat. Elsoként VaR-becslési utótesztelési statisztikákat és illeszkedésvizsgálati p -értékeket hasonlítok össze, utána pedig egy táblázatban a kvalitatív jellemzőket foglalom össze.

1 dimenziós VaR utótesztelési eredmények.

BUX, teljes időszak: 1991. január 2. – 2001. december 4.

- ❑ Megfigyelt napok száma összesen: 2723.
- ❑ Tesztelés módja: napról napra új eloszlás-illesztés, 250 napos csúszóablakkal.
- ❑ Illesztések száma eloszlásonként, és VaR becslések száma: 2473.

8. táblázat

Modell	Illeszkedés (teljes 2723)	VaR 95%	Kupiec	VaR 99%	Kupiec	VaR 99,5%	Kupiec
Historikus	-	5,46%	30,2%	1,58%	0,8%	0,89%	1,3%
Normál	0,00%	3,60%	0,1%	1,86%	0,0%	1,42%	0,0%
Kevert normál	0,00%	4,77%	59,9%	1,66%	0,3%	0,93%	0,7%
α -Stabil	0,29%	4,81%	66,6%	0,81%	32,3%	0,20%	1,7%
Student	7,85%	4,65%	42,0%	0,85%	43,9%	0,49%	91,7%
GARCH-modellek							
EWMA	0,00%	4,37%	14,0%	1,94%	0,0%	1,66%	0,0%
GARCH(1,1)	0,00%	3,68%	0,20%	1,50%	2,10%	1,25%	0,0%
EWMA α -Stabil ⁶⁴	3,42%	5,01%	97,4%	0,85%	43,9%	0,24%	4,4%

A teljes BUX élettörténet VaR alapú tesztelését nem elsősorban a VaR módszer illusztrálására, hanem inkább az alternatív eloszlásmodellek illeszkedés-vizsgálata kiegészítő teszteléseként végeztem el. Maguk a kapott eredmények nem meglepőek – hiszen az illeszkedést önmagában könnyen javíthatja, ha 2 helyett több paraméterrel leírható eloszlást alkalmazunk:

- ❑ A normál eloszlás 95% -os szinten kicsit túlbecsüli a VaR értékeket (itt még a normális eloszlás a „kövérebb” leptokurtikus társaihoz képest);

⁶⁴ Azért választottam stabil eloszlás illesztése előtti EWMA simítást a GARCH illesztés helyett, mert ebben az esetben semmilyen feltevessel nem kell élnünk az eloszlással kapcsolatban.

- ❑ A HS sem tunik igazán jó eszköznek az eloszlások szélén, de a normalitásnál jobb veszteség-elorejelzo eszköz;
- ❑ A szélek felé közeledve sem a feltétel nélküli, sem a feltételes normalitás illeszkedése nem fogadható el – kivételt jelent a GARCH(1,1), amely 99%-os VaR esetében még elfogadható modellként viselkedett;
- ❑ A két tagból kevert normál eloszlás 95%-os szinten viszonylag magas konfidencia szinten fogadható el, azonban 99%-os és 99,5%-os már kevésbé jó az illeszkedés – ugyanakkor ez az egyetlen normálisból származtatható eloszlás, amely egyáltalán még „érzékelhető” szinten fogadható el szignifikánsnak 99,5%-os VaR esetén;
- ❑ A stabil és a t -eloszlások minden szinten elfogadható eredményre vezettek, a stabil eloszlás kissé túl is becsli a szélsőséges eseményeket;
- ❑ Az eloszlás feltételelessé tétele javítja az elemzési eredményeket;
- ❑ Az eloszlás feltételelessé tétele során a VaR értékek alul- vagy túlbecslése kevésbé jellemző, mint a feltétel nélküli eloszlások során.

Mindezek a megállapítások összhangban állnak a 2000-ben a Közgazdasági Szemlében megjelent tanulmányban ismertetett tapasztalataimmal.

Többdimenziós eredmények kapcsán a már hivatkozott, 2002. februárjában publikált tanulmányunk tapasztalatai megerősítik azt a hipotézist, a kopula alkalmazásával nem csak kvalitatív szempontból jutunk több információhoz a vizsgált faktorok közös eloszlása kapcsán, de a VaR-becslések is javíthatók. Ennek ellenére mégsem tartom valószínűnek, hogy a napi gyakorlati VaR-számításban rövid távon jelentős szerephez jutna ez a modell-család, ugyanis az illesztési eljárása meglehetősen bonyolult, és a dimenziószám növekedésével erosen nő a becslési idő is.

2. Átfogó összehasonlítás

Az ismertetett módszerek kvalitatív tulajdonságait az alábbi táblázatban összegzem.

9. táblázat

Kockázat -mérési módszerek összehasonlítása			
Eljárás	Közgazdasági tartalom	Elony	Korlát
Visszaszámított eloszlás és averzió-becslés			
Visszaszámított volatilitás	A piaci szereplok várakozása a volatilitás alakulására.	A piac – amely sokszor önbeteljesítő – autentikus forrása lehet az előrejelzésnek.	Likvid opciós piacot igényel.
Nem paraméteres RND	A várakozások és az averzió ismeretében számításba vehető a befektetők várható piaci magatartása, reallokációs törekvései.	Az implikált volatilitás kiterjesztése eloszlásra, információt kaphatunk a piaci szereplok várakozásairól az eloszlás alakjára vonatkozóan (szélek, ferdeség), illetve az averzió változásáról.	A napközbeni árak erosen ingadozhatnak, így az „utolsó” árak egymáshoz képest torzíthatnak. Kis volumenu jegyzések ugyancsak torzíthatnak. Direkt visszaszámításnál feltétel az egyenlo lépcsőkönkénti kötési ár, ami szinte sosem teljesül. Simítás esetén az eredmény függ a volatilitás-görbére alkalmazott interpolációs technikától.
Paraméteres RND	Lásd:nem - paraméteres RND	Lásd: nem-paraméteres RND	Függ a feltételezett eloszlás alakjától.
Egydimenziós kockázat-terjedelmi modellek			
Normális eloszlás	A függetlenül, egyenletesen érkezo információkat sok piaci szereplo dolgozza fel és építi be az árak alakulásába.	Analitikus kezelésre kiváló és elegáns modell, a centrális határeloszlás tétele alapján, a hatékony piacok hipotézise mellett kézenfekvo modell.	A kockázatmérésre a szélsőséges események miatt erosen korlátozottan alkalmazható.
α -Stabil eloszlás	Figyelembe veszi az információk érkezésének és az árakba való beépülésének a szakadósos jellegét, kezeli a hektikus idoszakok jelenségeit, az alfa-paraméter mind a piaci, mind a likviditási kockázatról képet adhat. Az alfa a kockázat általánosabb mértéke lehet.	A centrális határeloszlás általánosítása –így elméleti síkon is indokolható modell, alakja az idotengelyre nézve stabil, idoben átskálázható, jól illeszkedik.	Illesztése és analitikus kezelése nehézkesebb.
Kevert normál eloszlás	Ketto vagy több, egyenként normális rezsimet feltételez, melyek egymást változtatják – így elkülöníthető a hektikus és nyugodt idoszak.	Könnyen interpretálható, jól illeszkedik.	Az igazán szélsőséges eseményeket nem kezeli.
Student -t eloszlás	Képet ad a faktoreloszlás leptokurtikus jellegéről.	Kiválóan illeszkedik.	Nem stabil, idoben nem skálázható, nincs lényegi közgazdasági tartalma.

Heteroszkedasztikus modellek	<i>A piaci kockázat idoben változó és klaszterezett, különböző mértéku nyugodt és hektikus periódusok különülnek el idoben.</i>	<i>A stacioner jelleg helyett elfogadják a heteroszkedaszticitást. Kvalitatívan jobb képet adnak a volatilitásról, mint a feltétel nélküli eloszlások. Nyugodt idoszakban kevésbé becslik túl, hektikus idoszakban kevésbé becslik alul a kockázatot.</i>	
Többdimenziós modellek			
Többdimenziós normális eloszlás korrelációs struktúrával	<i>Az egydimenziós normalitás többdimenziós kiterjesztése.</i>	<i>Analitikusan könnyen kezelhető. A korrelációs struktúra könnyen modellezhető és értelmezhető.</i>	<i>Sem a normalitás, sem az elliptikus jelleg nem alkalmas modellje a hektikus idoszakoknak.</i>
Többdimenziós eloszlások	egyéb	<i>Jobban modellezik a leptokurtikus jellegét.</i>	<i>Az illesztés technikai megvalósítása rohamosan nehezedik. (Gyorsan növekvő paraméterszám, azonos hosszúságú idosorok mellett.)</i>
Feltételes korreláció	<i>A volatilitások és korrelációk nem önállóan élik életüket, hanem eros interakcióban állnak. Felhívja a figyelmet a magas volatilitás –magas korreláció összefüggésre, amely pl. a diverzifikáció szempontjából jelentos.</i>	<i>Mind a kockázatelemzés, mind az eszközallokáció során számításba vehető a diverzifikációs hatás eroteljes gyengülése hektikus periódusokban. Kilép az együttesen elliptikus kontúrokból.</i>	
Faktormodellek (PCA)	<i>Megragadhatók a piacot, portfóliót érintő leglényegesebb kockázati tényezők.</i>	<i>Csökkeno dimenziószám, független faktorok.</i>	<i>Nem minden esetben interpretálhatók tartalmi oldalról a legfontosabb faktorok. A reziduális kockázatok elhanyagolása téves képet adhat az összkockázatról.</i>
Kopula, globális összefüggési paraméter	<i>A páronkénti kapcsolatokat kiterjeszti átfogó kapcsolatmérésre. A globális függőségi paraméter a szélsőséges események együttes bekövetkeztéről ad képet.</i>	<i>Kilép az elliptikus világból, a faktorok közös zuhanásáról, eloszlás- szélbeli függőségéről ad képet.</i>	<i>Illesztése, kezelése jóval nehezekebb az egyszerű modellekhez képest. Jellegükben jelentosen eltérő faktorok esetén, növekvő dimenziószám mellett (4-5 fölött) illeszkedésük sokszor nem fogadható el.</i>

4 Alkalmazási lehetőségek a stabilitási elemzésekben

4.1 Piaci kockázati és stabilitási elemzések

Az előző fejezetben áttekintettem és teszteltem azokat a legfontosabb modelleket (nevezhetjük őket esetenként eltérően *matematikai*, *statisztikai*, *ökonometria*i vagy *pénzügyi* modelleknek), amelyek a kockázati elemzések során (VaR-számítás, forgatókönyv-elemzés, stressz-teszt) különböző feltételezésekkel és technikai korlátokkal alkalmazhatók. Noha az áttekintés nem teljeskörű (például a stabilitás eloszlások esetén a szimmetrikus α -stabil eloszlást teszteltem, de például az extrém-érték eloszlások csak említés szintjén kerültek elő), mégis úgy érzem, hogy a legfontosabb irányzatokról egy viszonylag jó átfogó képet tudtam adni. Az, hogy melyik modellt alkalmazza az elemző, függhet egyaránt kvantitatív és kvalitatív elvárásoktól.

Tekintsünk először néhány példát egyedi intézmények (bank, befektetési bank, bróker, nyugdíjalap, stb.) különböző elemzéseire, amelyek során valamilyen kockázati modell alkalmazása szükséges:

- A rövid távú, 1-10 napos időtávra számított VaR becslés esetében a minél jobb *statisztikai illeszkedés* és a GARCH jellegű volatilitás lehet a domináló szempont, így magas szignifikancia szinten (99%, 99,5%) a feltétel nélküli normalitásnál tulajdonképpen minden más modell jobb becslésre vezet. A múltbeli mintavétel nem hosszú távú: 1-2 évnél hosszabb múltra visszatekinteni nem célszerű, hiszen ekkor a rövid távú volatilitás-becslésbe valószínűsíthetően nem-releváns információk is szerepet kaphatnak. (Kivételt jelenthetnek a különböző EVT-becslési eljárások (pl. *peaks-over-threshold*), amikor technikai okokból nagyobb mintára lehet szükség, de az iménti megállapítás továbbra is érvényes.) A RiskMetrics modell szerint optimalizált EWMA volatilitás számításához használt $\lambda=0,94$ -es faktor esetén például a múltbeli 106-ik napi megfigyelés súlya már kisebb, mint 0,01%.
- Hosszú távú elemzések során – példaként említhető a stratégiai eszközallokáció vagy kockázati költségvetés (*risk budgeting*) – a kvalitatív szempontok válnak

meghatározóvá, a hosszú időtávon mért volatilitásra illetve korrelációra vagyunk kíváncsiak, és ezekben az esetben a *normális eloszlás* használata *mellett* a gyakorlatban sokkal több érv (mint például az egyszerű interpretálhatóság, könnyű analitikus kezelhetőség, technikailag korlátlan számú dimenzióba kiterjeszthetőség) szól, mint az alternatív modellek (különösen a „statisztikai” modellek, mint például a *t*-eloszlás) mellett. Ekkor a múltbeli mintavétel visszatekintés időszak lényegesen hosszabb, *évtizedes* nagyságrendű lehet. A feltétel nélküli normalitás esetében számított hosszú távú volatilitások és korrelációk ekkor nem veszik figyelembe a stresszhelyzetek sajátosságait (extrém faktorváltozások, megugró korrelációk a kockázatos eszközök között, illetve a biztonságos szektorba történő átcsoportosítás), hanem (esetenként kimondatlanul) feltételezik, hogy ezek a stresszhatások hosszú távon eliminálódnak. A jelen fejezetben bemutatásra kerülő rezsimváltó modellel ugyanakkor ezek a hatások is számszerűsíthetők akár az ilyen hosszú távú elemzésekben is.

- Mind a napi rutinszerű VaR-bebecslést, mind pedig a stratégiai eszközallokációt és kockázati költségvetési számításokat célszerű kiegészíteni stresszelemzésekkel⁶⁵. Ez lehet *historikus* megfigyeléseken alapuló elemzés (1987-es tozsdekrach, 1998-as oroszországi és LTCM válság), lehet *hipotetikus* szcenárión alapuló (az elemző valamilyen megérzés alapján javasol egy lehetséges stresszszcenáriót, például a hozamgörbe párhuzamos elmozdulására), vagy alapulhatnak valamilyen leptokurtikus *eloszlásmodellen*. Ilyenkor a visszatekintési időszak ugyancsak hosszú, évtizedes mértékű, de a fókusz természetesen az eloszlásszéleken van. Ekkor kaphatnak kiemelt szerepet *tail-dependence* jelenséget figyelembe véve összefüggés struktúrák is (pl. kopulák), a már említett technikai korlátok szem előtt tartása mellett. A stressztesztek kapcsán említhető egyik legfontosabb hiányosság, hogy a *historikus* és *hipotetikus* stressz-forgatókönyvhöz nem lehetséges bekövetkezési *valószínűséget* rendelni. A hipotetikus elemzésnek további hátránya megérzésem szerint, hogy ugyan könnyen alkalmazható *egydimenziós* esetre, azonban *többdimenziós* elemzésben könnyen kreálhat az elemző inkonzisztens szcenáriókat (pl. negatív-definit kovariancia mátrix, stb.) Meg kell említenem,

⁶⁵ lásd például stabilitási elemzési aspektusból: BIS [2000]

hogy a pénzügyi módszertani kutatás a *piaci kockázatok* stressz-elemzésében meglehetősen szofisztikált szintre jutott el, ugyanakkor a korábban tárgyalt *likviditási kockázat*, amely a válsághelyzetek során sokszor egyáltalán nem kevésbé szignifikáns probléma-forrás, még vagy nem kap elég figyelt, vagy ha kap is, a rendelkezésre álló elemzési eszközök meglehetősen korlátozottak⁶⁶.

Az utóbbi években azonban nemcsak az egyedi intézmények készítene kockázatelemzési riportokat, hanem a pénzügyi rendszer stabilitásáért felelős intézmények (jegybankok, illetve nemzetközi pénzügyi intézmények) is publikálnak különböző *rendszerstabilitási*, aggregált kockázati elemzéseket. Ezek az aggregált kockázati elemzések az egyedi intézmények esetére tárgyalt példák közül leginkább a *harmadik esettel* állítható párhuzamba: egyfajta stressz-elemzésként foghatók fel ezek a pénzügyi rendszer egészére, viszonylag hosszabb múltbeli minta alapján, de a nagyobb veszteségekre koncentrálva. A stabilitási elemzésekben két alapvető megközelítési módot alkalmazhatnak ezek az intézmények (*BIS* [1997]):

- *Ártértékelési (Revaluation)* megközelítés: az elemző intézmény (jegybank) közzétesz lehetséges forgatókönyveket, és a vizsgált egyedi intézmények ezen scénáriók mentén kiértékelik saját portfólióikat, majd a becsült veszteségeket jelentik a jegybanknak. Az aggregált kockázat az egyedi intézmények veszteségeinek valamilyen *konszolidált* összege. Ezen konszolidált aggregált pozíció kiszámítása egy külön módszertant igényel, amelyet a dolgozatban nem tárgyalok, kutatásom szempontjából a scénárió-generálás jelenti a központi kérdést. Azonban röviden a konszolidáció problémája a következő példával érzékeltethető: ha A bank és B bank üzletet köt, akkor azonos nagyságú, de ellentétes elojelu pozíciókkal rendelkeznek az adott üzlet kapcsán. Azonos módszertant feltételezve a pozíciójukra azonos VaR-t számítanak ki, de a rendszerszintű VaR természetesen nem a két bank VaR-jának az összege, hiszen a releváns piaci faktorokra nézve ellentétes elojelu érzékenységet mutatnak. Az aggregált kockázat kiszámításához tehát elvileg szükség van minden egyedi nyitott pozíció ismeretére.

⁶⁶ Scholes [2000] nyomtatékosan felhívja a figyelmet a likviditási kockázat fontosságára, de az általa javasolt likviditási opciós megközelítés – legalábbis egyelőre – nem kapott kimondottan nagy figyelmet. Magam is úgy érzem, a “likviditási opciók” csak meglehetősen korlátozottan lesznek alkalmazhatók, és sokáig a hagyományos technikák, azaz a lejáratú táblák (maturity ladder), likviditási portfóliók, stb. maradnak a meghatározó likviditási kockázatkezelési eszközök.

- *Érzékenységi (Sensitivity)* megközelítés: ebben az esetben a jegybank nyitott pozíciókat, érzékenységi mutatószámokat (pl. duration a hozamgörbe különböző szegmensei mentén, deviza-nyitottság, stb.) kér az egyedi intézményektől, és a jegybank végzi el a szcenárió- vagy stressz-elemzést, az aggregált nyitott pozíció ismeretében. Ez lényegesen nagyobb elemzési szabadságot biztosít a jegybanknak, az elemzés nincs néhány szcenárióra korlátozva, hanem akár több ezer szcenárió mellett is kiértékelhető a pénzügyi rendszer kitettsége. Ezen felül a kockázat-konzolidálási vagy aggregálási probléma is sokkal könnyebben kezelhető, hiszen a jegybanknak nem számított (de sokszor egymást elimináló) veszteségeket kell összeadnia, hanem viszonylagos elemzési szabadsága van a konszolidáció során.

A két fő megközelítés nemcsak módszertani szempontból különbözik. Az *átértékelési* megközelítés esetében a jegybanknak a stabilitási riport közzététele előtt már ki kell adnia a feltételezett kockázati forgatókönyveket a piaci szereplőknek, hogy azok a veszteség-becsléseiket elvégezhessek. Ekkor azonban a jegybank egyfajta járulékos üzenetet is közvetíthet a piaci szereplők felé: melyek azok a különleges, kitüntetett szcenáriók, amelyekről a jegybank valójában „fél”, és szélsőséges esetben ez az információ akár egy önbeteljesítő folyamatot is elindíthat a piacon⁶⁷. Mindenesetre talán biztonságosabb előbb csak a nyitott pozíciókat összegyűjteni, és a stabilitási riport publikálása során transzparens módon közzétenni, milyen módszerrel kerültek előállításra az alkalmazott szcenáriók. A stabilitási, aggregált kockázatbecslési riportok közzététele és hasznosítása mindenestre egy külön alfejezete magának a stabilitási irodalomnak⁶⁸.

Az általam ismert BIS illetve IMF által készített országtanulmányok (*Barnhill et al.* [1999?], illetve *Barnhill et al.* [2000]) – továbbá az MNB által közzétett jelentések is – az *érzékenységi* megközelítést alkalmazzák (*MNB* [2000, 2001, 2002]). E tanulmányok már jelen állapotukban is feltételezhetően igen jó képet adnak a pénzügyi rendszer kockázatairól, és legnagyobb érdemük, hogy egy adott ország pénzügyi rendszerének aggregált nyitottságára nézve, szimulációs szcenárió-generálási módszerrel valójában egy VaR-jellegű becslést adnak a piaci és hitelkockázati nyitottságról. Ugyanakkor néhány szempontból további finomítások lehetségesek:

⁶⁷ Nem tudok róla, hogy ilyen helyzet valóban előfordult volna már a valóságban.

- a generált scenáriók többdimenziós normális eloszláson alapulnak, melyek „stressz-elemzési” szempontból nem tekinthetők elég konzervatívnak⁶⁸. Dolgozatomban javaslatot teszek a többdimenziós rezsimváltó modellek alkalmazására, melyek segítségével technikailag viszonylag egyszerűen és tartalmilag könnyen interpretálható módon figyelembe vehető mind a vastag-szélek, mind pedig az időben változó korreláció jelensége.
- általában *statikus, egyperiódusos* sokkhatások kerülnek generálásra, hasonlóan a VaR-bebecslésekhez (igaz, a becslési időhorizont hosszabb: 1 hónapostól az 1-3 éves időtávig terjedhet). A statikus elemzés (egyedi sokk) azonban számos korláttal rendelkezik. Egyrészt nem veszi figyelembe azt, hogy válsághelyzetek során a nagy volatilitású szélsőséges események koncentrálnak, egymás után több ismételt sokkhatás következhet be, és a piaci szereplők reakciói az első sokkhatás után elmélyíthetik a válságot (uniform magatartás a dinamikus fedezési stratégiák vagy VaR-limitek miatt, stb.) A rezsimváltó modellek segítségével egymás után több magas volatilitású, a kockázatos eszközök átmenetileg magas korrelációját feltételező stresszhelyzetet generálhatunk, majd újra visszatérhetünk nyugalmi időszakok helyzetek elemzéséhez, azaz az elemzés kiterjeszthető *többperiódusos, dinamikus* modellé. Megemlítendő azonban a dinamikus elemzések kapcsán, hogy elemzők kísérletet tettek a piaci szereplők változó magatartásának feltérképezésre is, például neurális hálók segítségével (Shimizu [1997]).

Az MNB elemzései hasonlóképpen statikusak, és többdimenziós normális eloszlásból származó scenáriókon alapulnak. Ezeket, és további más korlátokat maga az elemző is megemlíti, és várhatóan a jövőben még szofisztikáltabb elemzések várhatók a jegybanktól. Az MNB elemzései a banki nyitott pozíciók adatokra devizakockázati, kamatkockázati és hitelkockázati hatásokat összesít 1%-os rendszerszintű VaR formájában. A 2000-es elemzés tapasztalatai szerint a magyar bankrendszer aggregált kockázata szempontjából a hitelkockázat a meghatározó, a piaci nyitottság szempontjából a hazai bankok alapvetően konzervatív politikát folytatnak, és így jórészt fedezett pozíciókkal rendelkeztek az 1999-es nyitott pozíciók adatok alapján. A legfrissebb 2002-es elemzések hasonló képro-

⁶⁸ tárgyalja: Adechi és Jackson: *Information collection and disclosure*. BIS [1997]

tájékoztatnak: *A bankszektor kockázati kitettségét elemző piaci- és hitelkockázati stressz-tesztek a bankszektor jó stressztűrő képességét mutatják. A feltételezett váratlan, magas hitelezési veszteségek – hitelsokkok - a piaci sokkoknál ugyan jóval nagyobb veszteségeket okozhatnak a szektornak, azonban a hitelsokkok okozta potenciális veszteségek is csökkentek az előző évhez képest.*” (MNB [2002], pp. 8)

4.2 Egy lehetséges kockázatelemzési modell: rezsimváltás

Egy stabilitási stressz-elemzésnek számos kvantitatív és kvalitatív követelményt kell(ene) elégtíteni(e). Melyek ezek a szempontok, amelyeket célszerű a szcenárió generáláskor figyelembe venni?

- Feltétlenül informatív, ha a becsült veszteségi szinthez valószínűség-becslés is társítható – azaz bizonyos szempontból VaR-jellegű modellekről beszélünk, tehát célszerű valamilyen eloszlás-feltételezéssel élnünk.
- Az egyedi faktorok leptokurtikus jeleget mutatnak – ezt a követelményt a feltétel nélküli normalitáson kívül a korábban tárgyalt modellek – bár eltérő minőségben és fokon, de teljesítik. Ebből a szempontból szóba jöhetnek tehát az alábbi modellek:
 - Kevert-normál,
 - Stabil,
 - Student,
 - GARCH-modellek különböző eloszlások mellett.
- Az egyedi faktorváltozás legyen transzparens, közgazdaságilag értelmezhető, melynek megfelelően az alábbi modellek:
 - Kevert-normál,
 - Stabil,
 - GARCH-modellek.
- Többdimenzióban a feltétel nélküli korreláció hiányosságai helyett a válság-helyetekben tapasztalható megnövekvő együttmozgás kezelhető legyen:

⁶⁹ Barnhill et al. [2001] máris annyiban finomít az elemzésen, hogy két különböző múltbeli (egy “pozitív” és egy “negatív” gazdasági) időszakból becsül kovariancia mátrixokat, így a szerzők tulajdonképpen két, *feltételes* elemzést hajtanak végre.

- Kopula. A kopula illesztése azonban a dimenzió-szám növekedése mellett technikailag egyre nehezebb.
 - Feltételes korreláció.
- A többdimenziós struktúra legyen transzparens, közgazdaságilag értelmezhető
 - A kopula nem biztosan teljesíti ezt a követelményt, sokak számára fekete dobozként jelenhet meg (hasonlóan a student eloszlásnál leírtakhoz).
 - A PCA kiváló eszköz például a hozamgörbe elemzésére, de egyszerre sok eltérő jellegű pénzügyi változóra (árfolyam, kamatláb, részvényárfolyam, stb.) illesztve nehezen interpretálható eredményt adhat. Arra mindenképpen jó eszköz, hogy azonosítsunk kulcsfaktorokat, de azután célszerűbb lehet a kulcsfaktorokat (ha azonosíthatóak) eredeti idosoraik szerint elemezni.
- Ne csak egyedi periódus elemzésére, hanem több, egymást követő periódus dinamikus elemzésére legyen alkalmas. Ezt teljesíthetik rövid távú volatilitás szempontjából a GARCH-modellek, vagy a későbbiekben leírásra kerülő rezsimműltő modellek.

A lista alapján látható, hogy számos kvantitatív és kvalitatív követelménynek kellene megfelelni a választott modellünknek, és sokszor jelentős átváltással kell számolnunk a különböző modellek kapcsán. A kevert-normális eloszláshoz több szempontból hasonló modellt alkothatunk rezsimműltő modellek segítségével, melyek a kevert normál eloszlásnál tapasztalt pontossággal jól illeszkedhetnek, de dinamikájukban elkülöníthetünk *nyugodt* és *válságos* időszakokat: míg a kevert normális eloszlás esetén csak az *állapotvalószínűségeket* ismerjük (pl. az alacsony illetve magas volatilitás valószínűsége 2 komponensű kevert normál eloszlás esetén), a rezsimműltő modellek azonban – továbbra is ketto, *alacsony* és *magas* volatilitású állapotot (rezsime) feltételezve – az egyik rezsimebol a másik rezsimebe történő *átmenetvalószínűséggel* is számolunk. Az alábbi ábra az egyszerű kevert normál modell, illetve a vele azonos *volatilitásokat*, *várható értékeket* és *állapotvalószínűségeket* feltételező, de az *átmenet-valószínűségeket* is számba vevő 2-állapotú rezsimműltő modell segítségével szimulált adatsort hasonlít össze. Míg a

két adatsor hisztogramjai elvileg azonosak lennének, az ábrákon látható, hogy a második modell (a GARCH-hoz hasonlóan) *koncentrált* magas volatilitású szakaszokat mutat, amely elősegíti a piaci kockázatok viselkedésének dinamikus elemzését.

63. ábra



A 3-ik fejezet végén láthattuk, hogy a *kevert-normális* eloszlás lényegesen jobb illeszkedést produkált, mint a feltétel nélküli normalitás – ugyanakkor más modellek (pl. *stabil*-, vagy *student*-eloszlás) még jobb illeszkedést mutattak. Azonban a kevert normál eloszlás feltétlen elonye más modellekkel szemben, hogy közgazdasági interpretálhatósága rendkívül intuitív, tehát semmiképpen sem tekinthető fekete-doboznak, ami érzésem szerint egy viszonylag hosszabb távú kockázatelemzésben (legyen az egyedi intézmény stratégiai eszközallokációja vagy egy ország stabilitási elemzése) kulcsfontosságú. Technikai szempontból nem elhanyagolható továbbá az a tény sem, hogy többdimenziós kiterjesztése során a statisztikai illesztés számítástechnikailag sokkal egyszerűbb, mint a legtöbb alternatív-eloszlás esetén, és a dinamikus korrelációs struktúra interpretációja ugyancsak intuitívebb, mint például egy kopuláé lenne.

4.2.1 A rezsimváltó modellek leírása

Fejezetünk középpontjában módszertani szempontból a *Hamilton* által bevezetett *rezsimváltó modellek* állnak (*Hamilton* [1989] illetve *Hamilton* [1990]. Részletes tárgyalás a szerzotol még: *Hamilton* [1994]), melyek lehetővé teszik, hogy elemzésünk során elkülönítsünk *nyugodt* és *stresszes* időszakokat, a *múltbeli megfigyelések* valamely *rezsimhez* való tartozására *valószínűségi* becsléseket

tehetünk, illetve dinamikus szimulációt hajtsunk végre jövőbe tekintő kockázatelemzéseink során.

Gazdasági idosorok elemzése során igen gyakran nem egy, hanem több lehetséges rezsimmel találkozunk – legyen az eltérő árfolyampolitika, *hausse* és *baisse* piac, nyugalom és válság, stb. –, amikor rezsimenként eltérő paraméterekkel írható le a megfigyelt folyamat. A modell módszertani nehézségét az jelenti, hogy a statisztikai értelemben tekintett *rezsim* folyamata közvetlenül nem figyelhető meg (ellentétben például egy „árfolyam-rezsim” jegybank által deklarált megváltozásától), mivel maga a rezsim és annak változása, átmenete egy másik rezsimbe is egy sztochasztikus folyamat. A statisztikai modell becslése során tehát feltételes paramétereket keresünk az alapfolyamatra a lehetséges rezsimiek függvényében, ugyanakkor becsüljük magát a rezsimváltás folyamatát is. A legegyszerűbb rezsimváltó modellt a *diszkrét rezsimváltást* feltételező Markov-lánc jelenti, dolgozatomban ezzel az esettel foglalkozok.

Ha feltételezzük, hogy a megfigyelt pénzügyi faktorváltozások m -dimenziós *normális* eloszlást követnek (de rezsimenként eltérő várható értékkel és kovariancia-mátrixszal), akkor y_t idosor surruségfüggvénye $s_t=i$ állapot avagy rezsim mellett:

$$f(y_t | s_t = i) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \det(\Omega_i)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - \mathbf{m}_i)' \Omega_i^{-1} (y_t - \mathbf{m}_i) \right\}$$

Az s_t rezsim váltása legegyszerűbben a Markov-lánc logikája szerint írható fel: legyen s_t véletlen változó, mely értékeit az $\{1, 2, \dots, N\}$ egész számok halmazából veszi fel, azaz N -állapotú Markov-láncot feltételezünk. Tegyük fel, hogy annak valószínűsége, hogy $s_t=j$, csak a megelőző megfigyeléstől függ:

$$P\{s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots\} = P\{s_t = j | s_{t-1} = i\} = P_{ij}$$

Az átmenetvalószínűségek $N \times N$ -es mátrixba foglalhatók. Ha $N=2$, akkor a két világállapotú, elsőrendű Markov-lánc átmenetvalószínűségei:

$$\begin{aligned} P(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) &= P_{11} \\ P(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) &= P_{12} = 1 - P_{11} \\ P(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) &= P_{21} = 1 - P_{22} \\ P(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) &= P_{22} \end{aligned} \quad \text{avagy} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 1 - P_{22} \\ 1 - P_{11} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Hamilton megmutatja, hogy $N=2$ esetén, amely esetet dolgozatomban a továbbiakban feltételezek, a $P(s_t=j)$ állapotvalószínűségek kifejezhetők az alábbi formában az átmenet-valószínűségekből:

$$P(s_t = 1) = \frac{1 - P_{22}}{2 - P_{11} - P_{22}}$$

A rezsimváltó modellek kezdetben makroökonómiai elemzésekben kerültek alkalmazásra, ugyanakkor már *kockázatelemzési* és *pénzügyi árazási* vonalon is vannak, akik felismerték e modell alkalmazási lehetőségeit – bár úgy érzem, a modell még nem kapta meg a méltó figyelmet. *Hardy* [2001] mind *VaR* és *Expected Shortfall* számításra, mind pedig opcióárazásra alkalmazza a rezsimváltó árfolyammodellt, és tapasztalatai szerint a pénzügyi idosorok nagy többsége statisztikai szempontból $N=2$ számú rezsimmel megfelelően leírható. *Billio* és *Pelizzon* [2000] *VaR*-becslésre alkalmazzák a modellt, és többdimenziós esetben egy PCA-jellegű faktormodellt alkalmaznak. Tapasztalataik szerint a rezsimváltó modell jobb *VaR*-becslést eredményezett, mint az EWMA vagy GARCH(1,1) modellek.

A jelenlegi kockázatelemzési gyakorlatban nagyrészt csak mint *kevert normális* eloszlásra egyszerűsödött formájában találkozunk a rezsimváltó modellekkel, amikor csak az *állapotvalószínűségek* kerülnek becslésre, azonban az *átmenetvalószínűségek* figyelmen kívül maradnak. Az átmenetvalószínűségek akkor kapnak kulcsszerepet, ha a kockázati modellt *dinamikussá* kívánjuk tenni, azaz nemcsak egyedi sokkokat, hanem azok folyamatát, sorozatát kívánjuk modellezni: nemcsak az egyedi válsághelyzetekre, hanem egész válság-periódusok lefolyására vagyunk kíváncsiak, esetleg a válságba való belépéstől egészen a kilépésig.

4.2.2 Az $N=2$ állapotú, időben állandó átmenetvalószínűségekkel leírható rezsimváltó modell becslése

A rezsimváltó modelleket elméletileg lehetséges lenne a klasszikus *maximum likelihood* módszerrel becsülni, ekkor azonban technikai nehézségekkel néz ekkor szembe az elemző. Mivel a kevert sűrűségfüggvények loglikelihood függvényének *több* lokális maximuma is lehet, az ML-eljárás rendkívül érzékeny a becslés során felhasznált induló paraméterekre, és a numerikus optimalizáció során nagyon

könnyen szingularitási probléma jelentkezik⁷⁰ (*Hamilton* [1994]). Technikai szempontból lényegesen hatékonyabb az *EM* (*Expectation Maximization*) becslési eljárást (pl. *Diebold, Joon-Haeng, Weinbach* [1994]) alkalmazni, amelyről bizonyítható, hogy a *likelihood* függvényt *maximalizáló* (azaz *ML*) becslési eredményre vezet, a legmagasabb lokális maximum pontban. Az eljárás két módszertani szempontból is érdekes:

1. A becslés az *E* (*expectation*) és az *M* (*maximization*) algoritmusok egymást váltogató iteratív folyamatából áll, és a becslt paraméterek a *loglikelihood* függvényt maximalizáló értékekhez konvergálnak.
2. A becsléshez *simított valószínűségeket* alkalmazunk: mivel az egyedi megfigyelésekről sokszor elég nehéz megmondani, hogy mely rezsimhez tartoznak (pontosabban: a becslt állapotvalószínűségek önmagukban rendkívül érzékenyek a megfigyelések egyedi értékeire, és emiatt meglehetősen *hektikusan* változnak), nemcsak az egyedi megfigyelések, hanem több megfigyelés *együttes* valószínűségei is kiszámításra kerülnek, melyek végül az állapot valószínűségeket széthúzzák 0 illetve 1 közeli értékekké. (A későbbiekben több ábrán is összehasonlítom a „nyers” és a „simított” valószínűségeket.) Ezen simított valószínűségekkel minden esetre jobban, látványosabban azonosíthatók a lehetséges rezsimék.

A becslés fő lépéseit *Diebold et al.* [1994] tanulmánya alapján írom le. Az *elméleti likelihood-függvény* az alábbi formában írható fel:

$$\begin{aligned} f(y_T, s_T | \mathbf{q}) &= f(y_1, s_1 | \mathbf{q}) \prod_{t=2}^T f(y_t, s_t | y_{t-1}, s_{t-1}; \mathbf{q}) = \\ &= f(y_1 | s_1; \mathbf{q}) P(s_1) \prod_{t=2}^T f(y_t | s_t, y_{t-1}, s_{t-1}; \mathbf{q}) P(s_t | y_{t-1}, s_{t-1}; \mathbf{q}) \end{aligned}$$

A loglikelihood függvény maximalizálásához vezet az alábbiakban leírt, eredetileg *Hamilton* [1990] által kidolgozott E-M algoritmus. A becslés során célunk, hogy a teljes elméleti loglikelihood függvény várható értékét *maximalizáljuk*, a megfigyelt adatokra kondicionálva. *Hamilton* javaslata szerint ezt technikailag az alábbiakban leírt, simított állapotvalószínűségek alkalmazásával tehetjük meg:

⁷⁰ Megjegyzem, hogy dolgozatom tézis-javaslat fázisában a VaR utótesztelési vizsgálatban pont ezen ok miatt hiányzott a kevert-normál eloszlás, ugyanis az ML algoritmus rendkívül hatékonytalannak bizonyult. A jelen változatban a kevert-normál VaR eredmények EM algoritmus alapján születtek.

$$\begin{aligned}
& E[\log f(y_T, s_T | \mathbf{q}^{(j-1)})] = \mathbf{r}^{(j-1)} [\log f(y_1 | s_1 = 1) + \log \mathbf{r}^{(j-1)}] + \\
& + (1 - \mathbf{r}^{(j-1)}) [\log f(y_1 | s_1 = 0) + \log (1 - \mathbf{r}^{(j-1)})] + \\
& + \sum_{t=2}^T \{ P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) \log f(y_t | s_t = 1; \mathbf{q}^{(j-1)}) + \\
& + P(s_t = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) \log f(y_t | s_t = 0; \mathbf{q}^{(j-1)}) + \\
& + P(s_t = 1, s_{t-1} = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) \log(p_t^{11}) + \\
& + P(s_t = 0, s_{t-1} = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) \log(1 - p_t^{11}) + \\
& + P(s_t = 1, s_{t-1} = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) \log(1 - p_t^{00}) + \\
& + P(s_t = 0, s_{t-1} = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) \log(p_t^{00}) \}
\end{aligned}$$

ahol \mathbf{r} az első megfigyelés becsült állapotvalószínűsége, j pedig az iteráció indexe.

Az E-M iteratív algoritmus fő lépései nagyvonalakban az alábbiak:

1. Az iteráció kezdő $\mathbf{q}^{(0)}$ paramétereinek meghatározása,
2. Az állapot- és átmenetvalószínűségek becslése (*E-lépés*):

$$P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(0)}) \quad \forall t$$

$$P(s_t = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(0)}) \quad \forall t$$

$$P(s_t = 1, s_{t-1} = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(0)}) \quad \forall t$$

$$P(s_t = 1, s_{t-1} = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(0)}) \quad \forall t$$

$$P(s_t = 0, s_{t-1} = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(0)}) \quad \forall t$$

$$P(s_t = 0, s_{t-1} = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(0)}) \quad \forall t$$

és $E \log f(y_T, s_T | \mathbf{q}^{(0)})$ számítása a becsült P -k segítségével

3. a paraméterek módosítása olyan módon, hogy

$$\mathbf{q}^{(1)} = \arg \max_{\mathbf{q}} E[\log f(y_T, s_T | \mathbf{q}^{(0)})] \text{ teljesüljön } (M\text{-lépés})$$

4. az iteráció folytatása valamely konvergencia-kritérium teljesüléséig. A konvergencia meghatározható a loglikelihood függvény értékének iterációnkénti változása nagyságában, avagy a \mathbf{q} paraméterek változásában. Én az elemzések során az utóbbi megoldást követtem: az iterációt mindaddig folytattam, amíg az állapot- és átmenetvalószínűség-értékek valamelyikének is iterációnkénti változása meghaladta a 0,01%-nyi értéket.

A becslés technikai lépései a *Függelék* 3-ik részében kerülnek részletes ismertetésre.

4.3 Globális eszközök

Az első esettanulmányban globális befektetési eszközcsoporthoz, pontosabban az amerikai és nem-amerikai fejlett piaci részvények, illetve globális kötvények hozamkockázati viselkedését vizsgálom meg. A vizsgálatot az elmúlt tíz év (1992-2002) havi hozamai alapján végeztem. Az amerikai részvények hozamát a *Russell 3000* indexszel, a nem-amerikai részvényekét pedig a *Morgan Stanley Capital Index ex-US* indexszel mérem, továbbá a globális kötvénypiac teljesítményét a *Salomon Brothers 50%* amerikai befektetési kategóriájú kötvénypiaci index (BIG) és *50%* nem amerikai állampapír index (WGBI ex-US) kompozíciója adja.

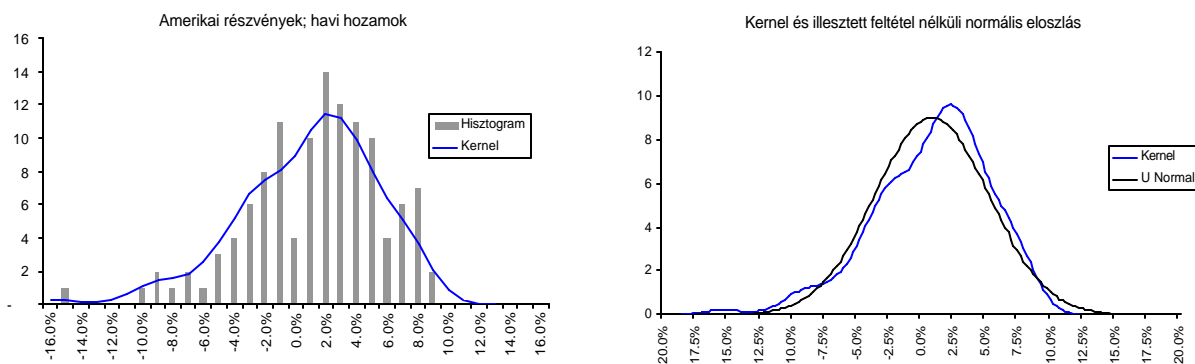
4.3.1 Russell 3000 amerikai részvény-index

Első lépésben felelevenítem a legegyszerűbb elemzési lehetőséget: az egydimenziós 2-komponensű kevert normál eloszlás illusztrációját az amerikai részvényekre. A becslési eredmények szerint a megfigyelések közel 70%-ában *hausse* piacot figyelhettünk meg, azonban az esetek 30%-ában magasabb volatilitású *baisse* piaccal szembesült a befektető.

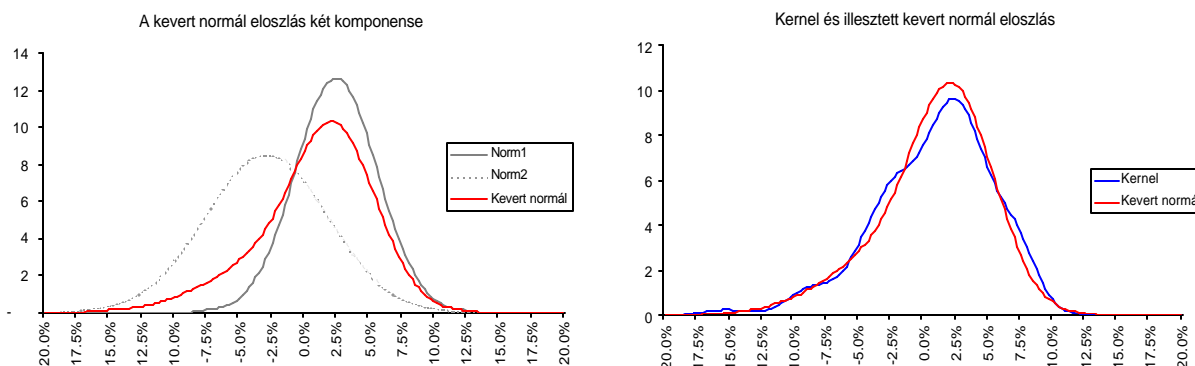
$$P(S_t = 1) = 70.7\% \quad , \quad \mathbf{m} = \begin{cases} 2.4\% & | S_t = 1 \\ -2.9\% & | S_t = 2 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{s} = \begin{cases} 3.1\% & | S_t = 1 \\ 4.7\% & | S_t = 2 \end{cases}$$

Az alábbi ábrák a tapasztalati hisztogram közelítését mutatják feltétel nélküli normális illetve kevert normál eloszlás esetében:

64. ábra



65. ábra



4.3.2 Háromdimenziós kevert normál eloszlás becslése

A kevert-normál eloszlás igen könnyen kiterjeszthető 3-dimenzióra, amikor mind a három eszközcsoport viselkedését szimultán módon vizsgáljuk. Lényeges új információt ezúttal a korrelációs mátrix becslése jelent: amint az adatokból látható, a megfigyelések közel 80%-ában pozitív részvényhozamok, mérsékelt volatilitások és korrelációk voltak tapasztalhatók. Az esetek 20%-ában azonban a helyzet drámaian változik: a részvény-hozamok negatívvá válnak, az amerikai (*USEQ*) és nemzetközi részvények (*NUSEQ*) korrelációja hatalmasat ugrik, lerontva ezáltal a remélt diverzifikációs hatást a stresszes időszakokban. Ezzel szemben a (befektetési kategóriájú) kötvénypiacok (*GFI*) és részvénytőzsiatok korrelációja erősen negatívvá válik, tükrözve a *flight-to-quality* hatást.

$$P(S_t = 1) = 82.2\%$$

$$P(S_t = 2) = 17.8\%$$

$$\mathbf{m}'(USEQ, NUSEQ, GFI) = \begin{cases} [1.7\%, 0.8\%, 0.7\%] & | S_t = 1 \\ [-3.1\%, -2.0\%, 0.6\%] & | S_t = 2 \end{cases},$$

$$\mathbf{s}'(USEQ, NUSEQ, GFI) = \begin{cases} [3.3\%, 3.7\%, 0.9\%] & | S_t = 1 \\ [6.3\%, 6.4\%, 0.7\%] & | S_t = 2 \end{cases}$$

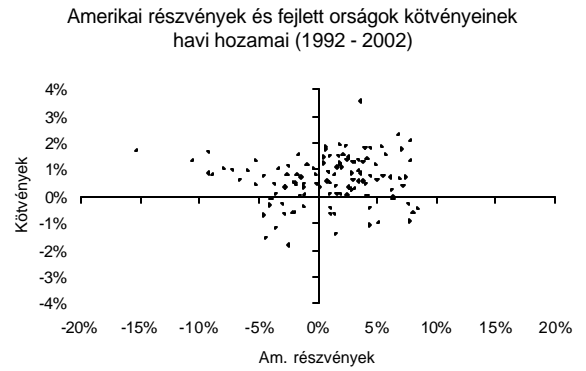
$$r_{S_t=1} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.56 & 0.34 \\ & 1.00 & 0.11 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}, r_{S_t=2} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.93 & -0.92 \\ & 1.00 & -0.73 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}$$

A következó oldal ábrái azt illusztrálják, hogy miként alakultak az amerikai részvények és a nemzetközi kötvények hozamai egymás függvényében, illetve milyen szcenáriókat tudunk szimulálni *többdimenziós feltétel nélküli normál* illetve *többdimenziós kevert normál* eloszlással.

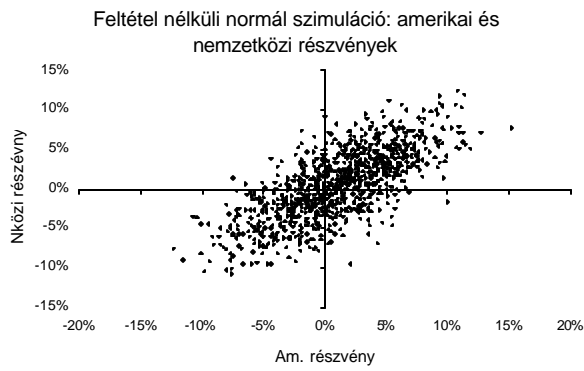
66. a ábra



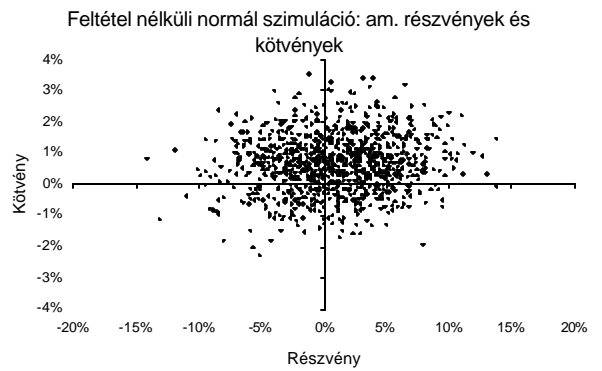
66. b ábra



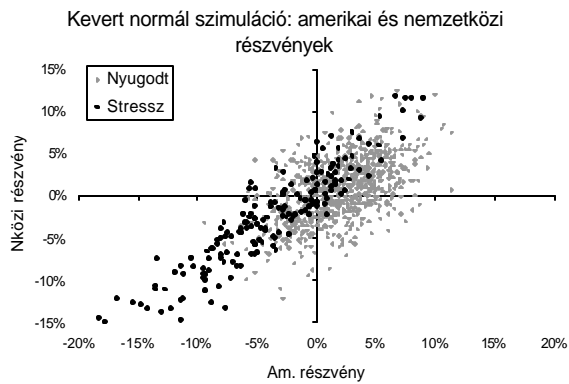
66. c ábra



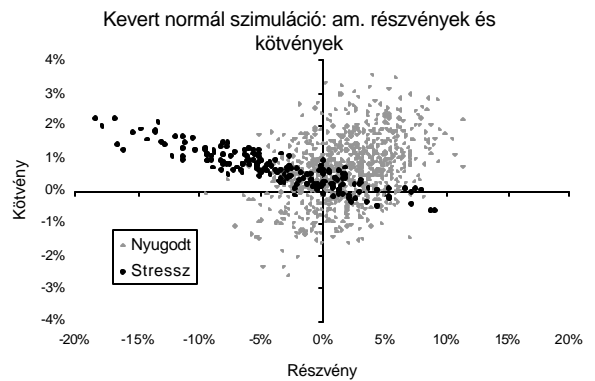
66. d ábra



66. e ábra



66. f ábra



4.3.3 Globális eszközosztályok és a rezsimváltó modellek

Abban az esetben, ha nem elégszünk meg az állapotvalószínűségek becslésével, hanem az *átmenetvalószínűségekre* is kíváncsiak vagyunk, valóban a *rezsimváltó* modell becslésére van szükség. A kevert normál eloszlás becslési eredményeihez képest a becsült paramétereink némiképp módosultak, de a várhatóértékek, volatilitások és korrelációk jellege, illetve maga a közgazdasági üzenet nem változott. Ellenben új információt hordoz az átmenetvalószínűségek mátrixa: a historikus adatok alapján, ha nyugodt időszakot figyelhettünk meg egy adott hónapban, 93% valószínűséggel hasonló időszak következett a következő hónapban is. Ellenben, ha átléptünk egy *baisse* rezsimbe, 97% valószínűséggel ezzel kellett szembesülnünk a következő hónapban is – legalábbis a 90-es évek tapasztalatai szerint:

10. táblázat

Átmenet-mátrix		<i>t</i> időszak	
<i>t-1</i> időszak	S=1 állapot	S=1 állapot	S=2 állapot
	S=2 állapot	$P_{11}=93.1\%$	$P_{12}=1-P_{11}$
		$P_{21}=1-P_{22}$	$P_{22}=96.8\%$

A *hausse* vagy nyugodt rezsim állapotvalószínűsége 68,2%-nak adódott, a hozamparaméterek becsült értékei pedig alább láthatók:

$$\mathbf{m}'(USEQ, NUSEQ, GFI) = \begin{cases} [1.7\%, 1.1\%, 0.6\%] | S_t = 1 \\ [-1.1\%, -1.6\%, 0.8\%] | S_t = 2 \end{cases},$$

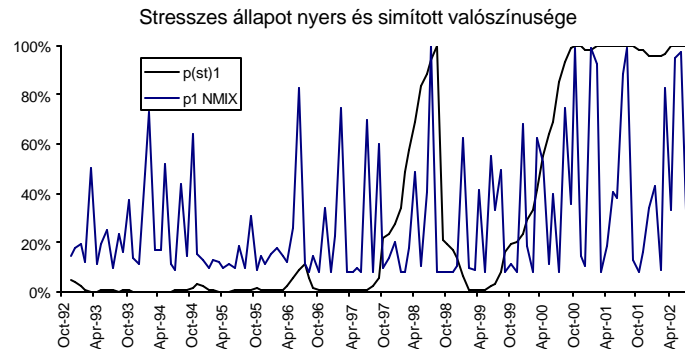
$$\mathbf{s}'(USEQ, NUSEQ, GFI) = \begin{cases} [3.3\%, 3.9\%, 0.9\%] | S_t = 1 \\ [5.6\%, 4.8\%, 0.7\%] | S_t = 2 \end{cases}$$

$$r_{S_t=1} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.59 & 0.40 \\ & 1.00 & 0.13 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}, r_{S_t=2} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.84 & -0.33 \\ & 1.00 & -0.35 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}$$

Az, hogy az egyszerű kevert normál eloszlás illesztésénél kapott eredményektől némiképpen eltérő becslésekre jutottunk, nem véletlen. A módszertani részben

tárgyalt simított valószínűségekre van szükségünk ahhoz, hogy a feltételezett rezsimeket a lehető legjobban beazonosítsuk: az alábbi ábra összehasonlítja a hektikus *baisse* rezsimbe esés “nyers” és “simított” valószínűségeit:

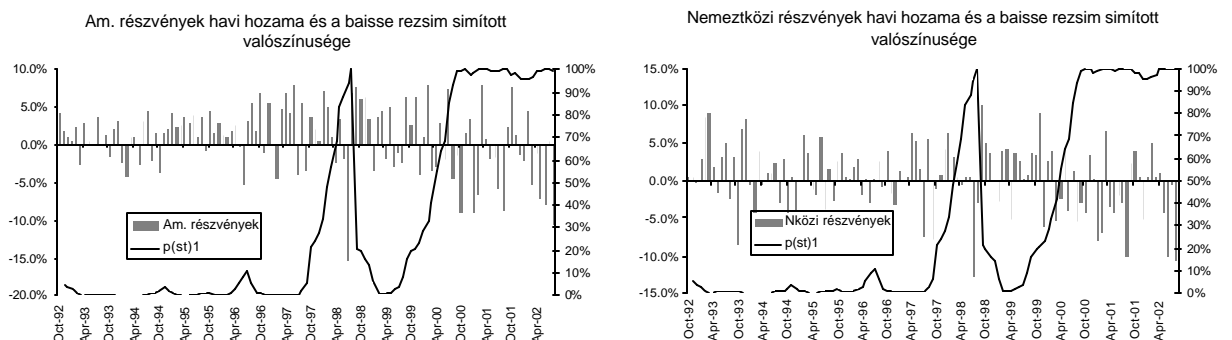
67. ábra



Amint látható, a nyers valószínűséghez képest a simított valószínűség igyekszik a 0% -hoz illetve a 100% -hoz „széthúzni”, és viszonylag kevésbé hektikusan változni. Tartalmilag ezt úgy értelmezhetjük, hogy a rezsimek megváltozásának becslésekor igyekszünk kevésbé érzékenyek lenni egy egyedi megfigyelésre, és valóban csak tartós „rezsimváltozás” esetén beazonosítani az új rezsimeket vagy állapotot.

Az alábbi ábrák az egyes eszközosztályok havi hozamait és a stresszes rezsimbe esés simított valószínűségeit mutatják. A részvények esetén „szemmel látható” a simított rezsimvalószínűség és a hozamok valamely rezsimekhez való tartozása szerinti várható elojele közötti összefüggés.

68. ábra





4.4 Hazai kockázati faktorok

A nemzetközi piacok után a hazai tokepiaci eszközök viselkedésére fordítom a figyelmemet. Várakozásaim szerint hasonlóképpen beazonosíthatóak alacsony és magas volatilitású időszakok, illetve rezsimenként változó korrelációs struktúrák.

4.4.1 Egydimenziós rezsimváltó modell: BUX index

Az első példa a BUX napi hozamainak egydimenziós elemzése az 1997. október – 2002. október közötti időszakra. A becslési eredmények szerint hasonlóképpen elválaszthatóak a nyugodtabb *hausse* piac és a magasabb volatilitású *baisse* piac idoszakai, mint a nemzetközi részvények esetében. A simított valószínűségek ábráján különösképpen az 1998-as válság azonosítása érdemel figyelmet. (A szeptember

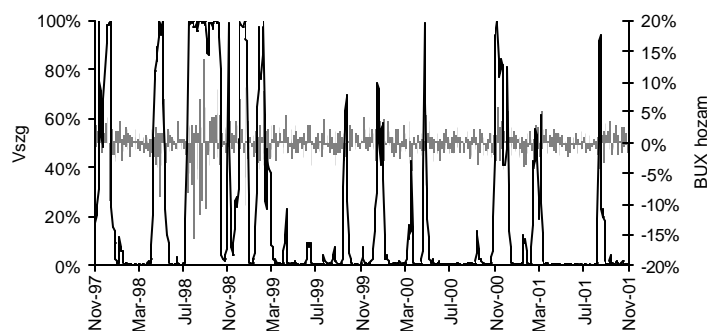
11-i terror csak egy meglehetősen rövid idoszakként kerül azonosításra.)

$$P(S_t = 1) = 80.4\% \quad , \quad \mathbf{m} = \begin{cases} 0.07\% & | S_t = 1 \\ -0.24\% & | S_t = 2 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{s} = \begin{cases} 1.4\% & | S_t = 1 \\ 3.9\% & | S_t = 2 \end{cases}$$

11. táblázat

Átmenet-mátrix		t időszak	
$t-1$ időszak	S=1 állapot	S=1 állapot	S=2 állapot
	S=2 állapot	$P_{11}=97.7\%$	$P_{12}=1-P_{11}$
		$P_{21}=1-P_{22}$	$P_{22}=90.8\%$

69. ábra

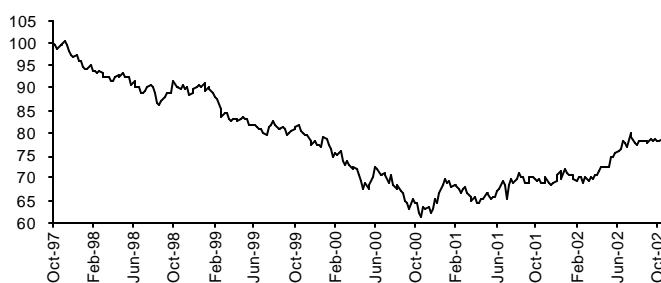


4.4.2 Egydimenziós rezsimváltó modell: HUF/USD árfolyam

A következő egydimenziós elemzésben a *dollár-forint* árfolyam 1997. október-2002. október közötti heti változásainak vizsgálatát végeztem el. Az elemzés nemcsak statisztikai, hanem pénzügyi-közgazdasági szempontból is érdekes, hiszen a rezsimváltó modelltól elvárjuk, hogy beazonosítson alacsony és magas volatilitású rezsimeket, ugyanakkor tudjuk, hogy valóban volt árfolyampolitikai „rezsimváltás” is. Hipotézisként feltehetjük, hogy a statisztikai és árfolyampolitikai rezsimiek egybe „kellene hogy essenek”. Tekintsük a dollár-forint idosorát illetve a becsült statisztikai eredményeket:

70. ábra

A forint dollárban kifejezett értéke (2000=100)



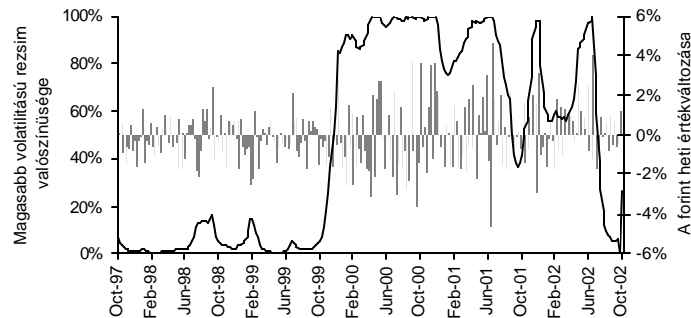
$$P(S_t = 1) = 53.4\% \quad P(S_t = 2) = 46.6\% \quad , \quad \mathbf{m} = \begin{cases} -0.18\% & |S_t = 1 \\ 0.03\% & |S_t = 2 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{s} = \begin{cases} 0.96\% & |S_t = 1 \\ 1.80\% & |S_t = 2 \end{cases}$$

12. táblázat

Átmenet-mátrix		<i>t</i> időszak	
		S=1 állapot	S=2 állapot
<i>t-1</i> időszak	S=1 állapot	$P_{11}=96.5\%$	$P_{12}=1-P_{11}$
	S=2 állapot	$P_{21}=1-P_{22}$	$P_{22}=96.6\%$

A simított valószínűségeket tekintve láthatjuk, hogy 1999-2000 fordulóján rezsimváltás következett be:

71. ábra



És valóban, 2000. januárjától a korábbi 70% EUR – 30% USD devizakosár helyett a 100% EUR kosár került bevezetésre, amely egyértelműen indokolja a dollár-forint árfolyamváltozások volatilitásának drasztikus megnövekedését. Hasonló, illetve még drasztikusabb “rezsimváltást” jelent az EUR/HUF árfolyam szempontjából a 2001-es sávnýtás.

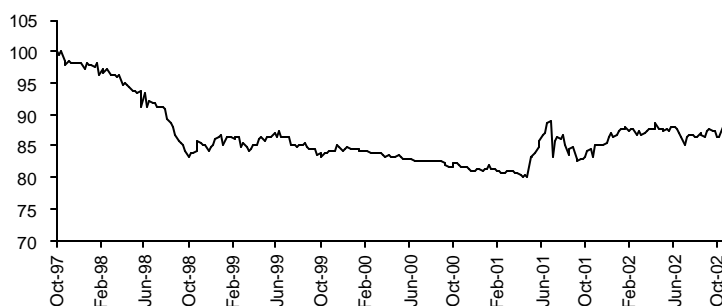
4.4.3 Megjegyzés a HUF/EUR árfolyam kapcsán

Mint minden modellnek, így a 2-állapotú rezsimváltó modelleknek is megvannak a maga korlátai. Ha hasonló elemzést végzünk a forint-euró árfolyam heti változásaira az 1997. október-2002. október közötti időszakra, furcsa eredményeket kaphatunk. Világos, hogy a HUF/EUR árfolyam adott időszakban helyesen 3 rezsimmel lenne felírható:

- a 70% EUR (DEM): 30% USD devizakosár időszakára 2000. januárig
- a 100% EUR kosár időszakára, +/- 2.25% sávszélességgel, illetve
- a 100% EUR kosár időszakára, +/- 15% sávszélességgel 2001. májusától

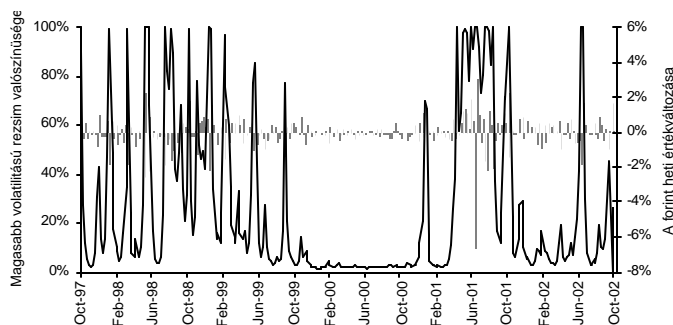
72. ábra

A forint euróban kifejezett értéke (2000=100)



Az árfolyamváltozásokra illesztett 2-állapotú modell simított valószínűségei az alábbi képet mutatják:

73. ábra



A modell meglehetősen biztonsággal azonosítja a 100% EUR kosár +/-2,25%-os sávszélességu időszakát mint alacsony volatilitású időszakot. Ezzel szemben nehezen jut dologra a másik két periódussal – ebben az esetben feltételezhetően pontosabb képet kaphatnánk 3-állapotú rezsimváltó modellel.

Mivel az árfolyamok statisztikailag megfigyelhető *rezsimjei* nagyrészt az árfolyampolitika függvényei is – eltérően például egy feltörekvő piaci hitelválság vagy egy fejlett piacokra átguruló, illetve ott kialakuló részvénypiaci vagy hitelpiaci válsághelyzet stresszes *rezsimjétől*, és emiatt némiképp eltérő módon kezelendők. Ha elemzésünkben csak a piaci kockázatokat kívánjuk figyelembe

venni (és nem számolunk politikai vagy a monetáris politikában bekövetkező változásokkal), az *euró-forint* volatilitásának becslésében csak a *jelenleg fennálló árfolyam-politika* időszakából származó megfigyelések tekinthetnek relevánsnak. A forint árfolyam mélyebb elemzéséről több hazai szakirodalom értekezik (Mikolasek [1998]).

4.4.4 Háromdimenziós kevert normál modell: BUX, Állampapír, Forint

A korábbiakban láthattuk azt, hogy a részvénytapi tapasztalati korrelációk megnövekednek válsághelyzetek idején. Erre példaként szolgált a különböző országok részvényindexei között mért korreláció ingadozása a dolgozat első fejezetében, a BÉT egyedi részvényeit leíró faktorok számának csökkenése a fokomponens-elemzést tárgyaló részben, illetve legutóbb az amerikai és a nemzetközi részvényindex közötti korreláció megugrása a stresszes rezsimben. Most tekintsük csak a hazai piacok fő faktorait: a részvénytapiacot, az állampapír-piacot⁷¹ és a devizapiacokat. Önkényesen a mindenkor 5 év hátralevo futamidejű állampapírt választottam a kamatláb-kockázatot megtestesítő instrumentumként, illetve a *dollár-forint* árfolyamot a devizakockázat mérésére.

A 3-dimenziós kevert normál modell illesztésének eredményei 1997. október-2002. október közötti heti hozamok alapján:

$$\begin{aligned} P(S_t = 1) &= 80.7\% \\ P(S_t = 2) &= 19.3\% \end{aligned}$$

$$\mathbf{m}(BUX, \acute{A}P, HUF) = \begin{cases} [0.2\%, 0.0\%, -0.1\%] & | S_t = 1 \\ [-0.7\%, 0.5\%, 0.0\%] & | S_t = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}(BUX, \acute{A}P, HUF) = \begin{cases} [3.6\%, 0.7\%, 1.4\%] & | S_t = 1 \\ [6.9\%, 3.4\%, 1.6\%] & | S_t = 2 \end{cases}$$

$$r_{S_t=1} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.16 & 0.01 \\ & 1.00 & 0.14 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}, \quad r_{S_t=2} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.61 & -0.08 \\ & 1.00 & 0.09 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}$$

⁷¹ Itt egy kis pontosítást kell tennem: nem magát a kamatlábat, hanem az azt megtestesítő mindenkor 5 éves kötvény hozamait tekintetem, azaz nem kamatláb vagy elvárt hozam (*yield*) statisztikákat számoltam, hanem kötvény megtérülés (return) statisztikát.

Míg hasonlóan a globális eszközök esetéhez, elkülönítésre kerülnek az alacsony és magas volatilitású időszakok, meglepo lehet a részvénytőpiac és állampapírtőpiac közötti korreláció alakulása, melynek értelmezésére a következő pontban visszatérek.

4.4.5 Háromdimenziós rezsinváltó modell: BUX, Állampapír, Forint

Az azonos adatsorra illesztett rezsinváltó modell hasonló eredményekkel szolgál, mint a 3-dimenziós kevert normál modell illesztésének eredményei:

13. táblázat

Átmenet-mátrix		t időszak	
$t-1$ időszak	S=1 állapot	S=1 állapot	S=2 állapot
	S=2 állapot	$P_{11}=98.3\%$	$P_{12}=1-P_{11}$
		$P_{21}=1-P_{22}$	$P_{22}=92.3\%$

és a hozam-paraméterek:

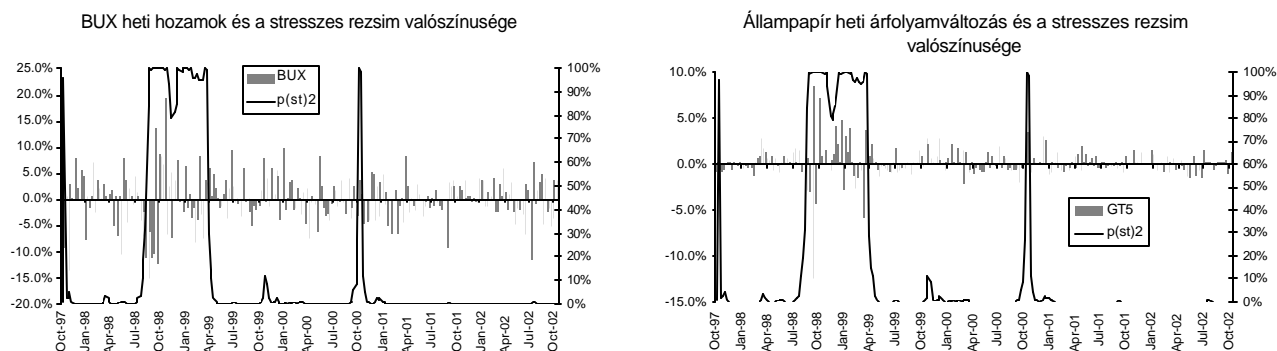
$$\mathbf{m}(BUX, \acute{A}P, HUF) = \begin{cases} [0.1\%, 0.1\%, -0.1\%] | S_t = 1 \\ [-0.2\%, 0.3\%, -0.1\%] | S_t = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{s}(BUX, \acute{A}P, HUF) = \begin{cases} [3.8\%, 1.0\%, 1.4\%] | S_t = 1 \\ [7.5\%, 3.6\%, 1.3\%] | S_t = 2 \end{cases}$$

$$r_{S_t=1} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.18 & -0.04 \\ & 1.00 & 0.13 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}, r_{S_t=2} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.64 & 0.02 \\ & 1.00 & 0.09 \\ & & 1.00 \end{bmatrix}$$

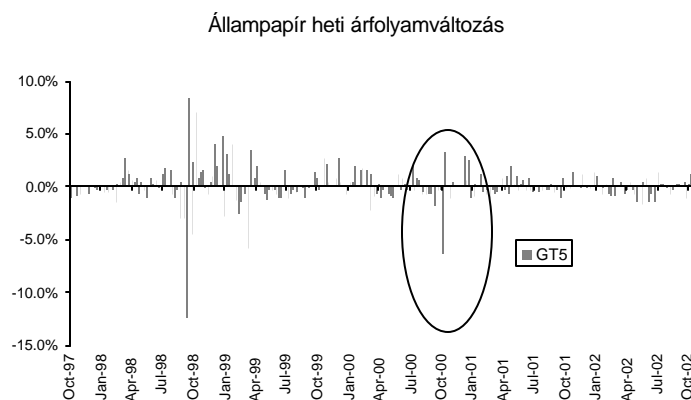
Az alacsony volatilitású rezsım állapotvalószínűségére a modell 82,2% -os becslési értéket adott. Az alábbi két ábra a részvények és az 5-éves állampapírok heti hozamait hasonlítja össze a simított stressz-valószínűség mellett:

74. ábra



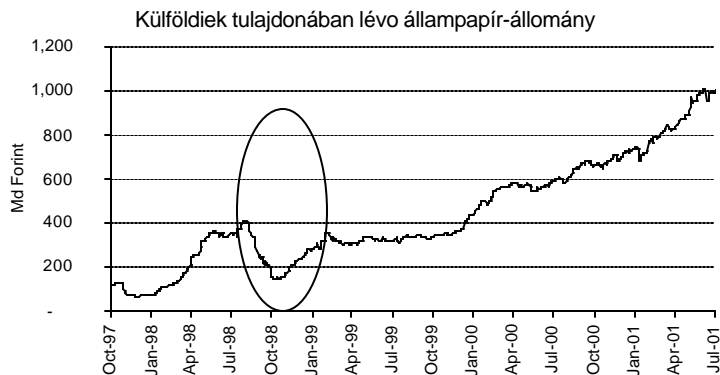
Az ábrákon nem látszik elég jól, de 2000. október végén illetve november elején az állampapír és a devizaárfolyam volatilitása jelentősen megnövekedett, ez okozza a 3-dimenziós rezsimmváltó modellben a stresszes valószínűség ugrását.

75. ábra



Kulcsfontosságú különbséget fedezhetünk fel tehát a hazai és a nemzetközi részvénytőke-állampapírtőke viszonyának összehasonlításában: a magyar állampapírok értékváltozása stresszhelyzetben eddig *nem* mutatta azt a *negatív* korrelációt (tehát biztonságba menekülési hatást) amit az amerikai példa esetében láthattunk – sőt: a korreláció pozitív irányban megnövekedett. Magyarázatként szolgáljon az alábbi ábra:

76. ábra



Mivel meglehetősen jelentős az állampapírpiacon a külföldi befektetők aránya, az állampapír árfolyamok érzékenyen reagálnak a külföldi befektetők magatartására. Az 1998-as válság során globális *biztonságos szektorba történő átcsoportosítást* tapasztalhattunk, ami a nyugati befektetők szempontjából azt jelentette, hogy kockázatos piaci (így a feltörekvő piaci, többek között tehát a magyarországi) befektetéseiket igyekeztek amerikai vagy nyugat-európai állampapírokba, illetve más, alacsony kockázatúnak ítélt eszközökbe csoportosítani. Ebben az esetben a magyar (vagy más feltörekvő piaci állampapírok) nem jelentették a kockázat-mentes eszközök csoportját: ellenkezőleg, éppen a kockázatos szektort képviselték. Ez egy mindenképpen tanulságos észrevétel: az egyik (esetünkben globális) tokepiacon megfigyelt jelenséget nem lehet előzetes vizsgálat nélkül automatikusan alkalmazni egy másik (pl. kis nyitott) piacra alkalmazni. Más kérdés, hogy Magyarország várható EU-tagságával a magyar állampapírok globális megítélése is várhatóan változni fog (illetve már a jelenben is változik), és ez az 1998-ban pozitív irányban megugró korreláció egy másik „rezsimbe” fog átlépni.

4.4.6 Záró gondolat

Az utolsóként tett megjegyzés egyben zárógondolatnak is tekinthető. A dolgozat fő megállapításai a bevezető részben már összefoglalásra kerültek, ezek teljeskörű és újbóli megismétlését nem tartom szükségesnek, csak néhány gondolattal egészítem ki azokat. A dolgozatban áttekintésre kerültek a tokepiaci válságok tapasztalati jelenségei, a befektetők kockázatkörülélének, illetve maguknak a „piaci

kockázatoknak” a lehetséges statisztikai mérési eszközei. Ugyanakkor ezek a statisztikai eszközök csak bizonyos megszorításokkal alkalmazhatók: mindenképpen elvárható, hogy a megfigyelt statisztikai paramétereket valamilyen közgazdasági interpretációval el tudjuk látni. Az elemzéseket mindig az adott gazdasági környezet fundamentális ismeretében, esetenként jövőbe tekintő módon érdemes elvégezni, a mechanikus alkalmazások számos veszélyt jelentenek. Ugyanakkor a statisztikai eszközök objektivitásukkal támogathatják az elemzést, és akárhogy nézzük: minden jövőre vonatkozó előrejelzés múltbeli információkon alapul.

A rezsimváltó modellek megfelelnek számos kvantitatív és kvalitatív elvárásnak. A velük rokon kevert normális eloszlás az empirikus tesztelés során jobb *Var*-becslo eszköznek bizonyult a feltétel nélküli normalitásnál (lásd 8. táblázat), noha számos egyéb modell még lényegesen jobb illeszkedést mutatott. Azonban az időben változó és elkülöníthető *várható érték* és *kovariancia* paraméterek illetve becsült *valószínűségek* olyan információkat nyújtanak az elemzőnek, amelyek értelmezése lényegesen egyszerűbb sok más eloszlás valamely leptokurtikusságot kifejező paraméterénél. Úgy érzem, ez a szempont kritikus mind a stabilitási elemzések, mind pedig a stratégiai eszközallokációs és kockázati allokációs döntések során. Ezek az időben változó statisztikák ugyanis nemcsak a jobb illeszkedést segítik elő, hanem egyúttal leírják a piaci válságok 1. részben leírt számos tapasztalati jelenségét, így nemcsak az átmenetileg magas volatilitást, hanem akár a *fertőzés* vagy a *biztonságba menekülés* jelenségét is.

5 Függelék

5.1 A kockázatelmélet elemzési rendszere⁷²

5.1.1 Hasznosság és kockázatkerülés

Ha egy szereplonek két szerencsejáték (L^a és L^b) között van választási lehetősége, választását preferenciái alapján hozza meg, és amennyiben az L^a játékot preferálja L^b -vel szemben, ezt az $L^a \succ L^b$ relációval fejezzük ki. Az u hasznosságfüggvény bevezetésével analitikusan vizsgálhatjuk a szereplők – így a befektetők viselkedését is. A hasznosságfüggvény magasabb értéke utal a kedvezőbb alternatívára, azaz:

$$u(L^a) > u(L^b) \Leftrightarrow L^a \succ L^b.$$

Abban az esetben, ha egy játéknak S lehetséges kimenetele van, és p_s -sel jelöljük egy adott s lehetséges esemény valószínűségét, akkor

$$L^a \succ L^b \Leftrightarrow \sum_{s=1}^S p_s^a u_s > \sum_{s=1}^S p_s^b u_s,$$

ahol u_s fejezi ki az adott s eseményhez tartozó hasznosságértéket, a szorzatösszeget pedig *várható hasznosságnak* hívjuk. Ha elemzésünket az anyagi jólétre szukítjuk, a *szerencsejátéknak*, illetve a továbbiakban *befektetésnek* a jólétünkhöz való hozzájárulását \tilde{w} véletlen változóval fejezzük ki, és a játék w végeredménye az a pénzösszeg, melyet elkölthetünk. Ha \tilde{w} eloszlását F fejezi ki, a várható $E(u)$ hasznosságra fennáll:

$$\tilde{w}_1 \succ \tilde{w}_2 \Leftrightarrow E(u(\tilde{w}_1)) > E(u(\tilde{w}_2)) \Leftrightarrow \int u(w) dF_1(w) > \int u(w) dF_2(w).$$

A hasznosságelmélet a bizonytalanság (avagy *kockázat*, ha rendelkezünk bizonyos ismeretekkel a lehetséges kimenetekre illetve azok eloszlására vonatkozóan) melletti döntések elemzésekor általában feltételezi a döntéshozók *kockázatkerülési* tulajdonságát, amely azt jelenti, hogy a befektető elutasítja a *zéró várható értékű*

⁷² A bevezető fejezet tételbizonyításai, ha másként nem hivatkozok: *Gollier* [2001]

kockázatot, azaz ha az induló jóléti szint w_0 , és a döntéshozó \tilde{x} ($E(\tilde{x})=0$) kockázattal szembesül, akkor:

$$E(u(w_0 + \tilde{x})) < u(w_0)$$

Matematikai értelemben a kockázatkerülést a hasznosságfüggvények *konkáv* volta mutatja, melyet a Jensen-egyenlotlenséggel fejezhetünk ki.

Az elemzések során sokszor több szereplot kell összehasonlítani kockázatkerülési szempontból, melyet a *viszonylagos kockázatkerülés* fogalmának bevezetése után tehetünk meg. Egy w_0 induló jóléttel és u_1 hasznosságfüggvénnyel rendelkező szereplo jobban kockázatkerülő egy ugyancsak w_0 kezdeti jóléttel, de u_2 hasznosságfüggvénnyel rendelkező szereplonél, amennyiben az 1. szereplo elutasít minden olyan kockázatot, amelyet a 2. szereplo is elutasít, függetlenül a kezdeti jólét nagyságától. Ezt a kockázatkerülési különbséget a $f(u) = u_1[u_2^{-1}(u)]$ fejezhetjük ki, vagy más felírásban: $u_1(z) = f[u_2(z)]$, ahol $z = w_0 + \tilde{x}$. Mivel mind u_1 mind u_2 a jólétre nézve növekvő függvény, így

$$f(u_2(z)) = \frac{u_1'(z)}{u_2'(z)}$$

ugyancsak pozitív, azaz f növekvő, és feltételezés szerint f függvény konkáv. Ha a 2. szereplo elutasítja az \tilde{x} kockázatot, azaz $E(u_2(w_0 + \tilde{x})) \leq u_2(w_0)$, akkor f növekvő és konkáv volta a Jensen-egyenlotlenség alkalmazásával

$$E(u_1(w_0 + \tilde{x})) = E[f(u_2(w_0 + \tilde{x}))] \leq f[E(u_2(w_0 + \tilde{x}))] \leq f(u_2(w_0)) = u_1(w_0)$$

eredményre vezet. Az 1. szereplo pontosan akkor jobban kockázatkerülő a 2. szereplőhöz képest, ha u_1 az u_2 függvénynek konkáv transzformációja, azaz f'' nempozitív. A másodrendű derivált kifejezhető

$$f''(u_2(z)) = \frac{u_1''(z)}{[u_2'(z)]^2} [A_2(z) - A_1(z)] \text{ alakban, ahol}$$

$$A_i(z) = -\frac{u_i''(z)}{u_i'(z)}$$

az i szereplo z helyen vett *Arrow-Pratt-féle abszolút kockázatkerülési együtthatója*, további elemzéseink kulcsfontosságú paramétere. Az A segítségével azt mondhatjuk, hogy az 1. szereplo jobban kockázatelutasító, mint a 2., ha $A_1 > A_2$.

A nyers (ellenérték nélküli) kockázat tehát csökkenti a kockázatviselők jóléti helyzetét. Ezen jelenség számszerűsítésére bevezették a *kockázati prémium* fogalmát: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(w_0, u, \tilde{x})$ jelenti azt a maximális pozitív pénzösszeget, melyet egy szereplő hajlandó kifizetni egy zéró várható értékű kockázat elkerülése érdekében:

$$E(u(w_0 + \tilde{x})) = u(w_0 - \mathbf{p})$$

Ha két szereplő közül az 1. jobban kockázatelutasító, mint a 2., akkor:

$$E(u_2(z_0 + \tilde{x})) = u_2(z_0 - \mathbf{p}_2) \Rightarrow E(u_1(z_0 + \tilde{x})) \leq u_1(z_0 - \mathbf{p}_2),$$

azaz egy magasabb kockázatkezelési fokkal rendelkező szereplő magasabb prémiumot hajlandó áldozni azonos mértékű kockázat elkerülése érdekében. Ha $w_0 = z_0 - \mathbf{p}_2$ és $\tilde{y} = \tilde{x} + \mathbf{p}_2$, akkor a fenti körülmény ekvivalens azzal, hogy u_1 -tol elvárjuk, hogy elutasítson minden olyan \tilde{y} játékot, amellyel szemben u_2 indifferens, ez pedig csak akkor igaz, ha u_1 konkávabb, mint u_2 .

Kapcsolódó fogalom a *kockázatmentes egyenértékes* fogalma. Ha lehetőségem van belépni egy \mathbf{m} várható értékű $\tilde{y} = \mathbf{m} + \tilde{x}$ játékba, ahol $E(\tilde{x}) = 0$, mi az a biztos C^e összeg, amelyre ezt a lehetőséget elcserélném? Azaz:

$$\begin{aligned} E(u(w_0 + \tilde{y})) &= u(w_0 + C^e) \\ C^e(w_0, u, \mathbf{m} + \tilde{x}) &= \mathbf{m} - \mathbf{p}(w_0, u, \tilde{x}) \end{aligned}$$

Egy játék vagy befektetés kockázatmentes egyenértékese tehát a várható hozam mínusz a kockázati prémium.

Abban az esetben, ha *kis* mértékű kockázatról beszélünk, alkalmazható a kockázati prémium *Arrow-Pratt-féle* közelítési módszere. Tekintsük $\tilde{y} = k\tilde{x}$ várható érték nélküli *kis* kockázatot (a kockázat *kicsiségére* a k szorzó utal), és annak $g(k)$ -val jelölt $\mathbf{p}(w_0, u, k\tilde{x})$ prémiumát, azaz $E(u(w_0 + k\tilde{x})) = u(w_0 - g(k))$. A közelítés során a k 0-hoz közeli környezetében vizsgáljuk $g(k)$ viselkedését. Amennyiben $k=0$, $g(0)=0$. Ha u kétszer differenciálható k szerint,

$$E(\tilde{x}u'(w_0 + k\tilde{x})) = -g'(k)u'(w_0 - g(k))$$

és így $g'(0)=0$, mivel $E(\tilde{x})=0$, továbbá

$$E(\tilde{x}^2 u''(w_0 + k\tilde{x})) = [g'(k)]^2 u''(w_0 - g(k)) - g''(k)u'(w_0 - g(k)).$$

Ezekből adódóan

$$g''(0) = -\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)} E(\tilde{x}^2)$$

Végezetül, ha g -t Taylor-sorba fejtjük $k=0$ közeli környezetében, a kockázati prémiumra az alábbi eredményt kapjuk:

$$p(w_0, u, \tilde{y}) = g(k) \approx g(0) + kg'(0) + 0,5k^2 g''(0), \text{ vagy ekvivalens módon:}$$

$$p(w_0, u, \tilde{y}) \approx 0,5E(\tilde{y}^2)A(w_0).$$

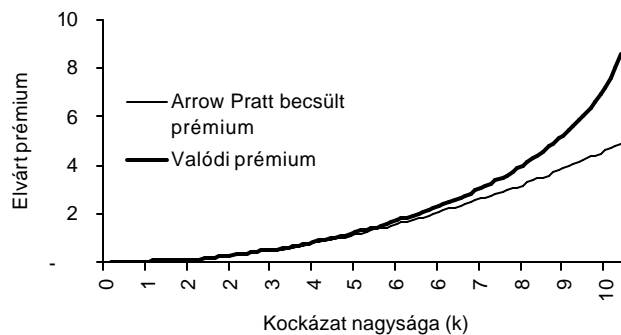
Ebbol arra juthatunk – és a portfólióelmélet gyakorlatilag erre a következtetésre épül, hogy *kis* (továbbá zéró várható értékű) kockázat esetében a kockázati prémium a játék *varianciájával* arányos. Ennek az eredménynek azért is van jelentősége, mert ebbol látható, hogy a variancia (vagy szórás) a *kockázat természetes* mértéke, és nem ad hoc választás eredménye. Markowitz [1952] a varianciával azonosítja a kockázatot, de nem tesz indoklást erre vonatkozólag.

Ahogy k közelít 0-hoz, a kockázati prémium k^2 szerint közelít zéróhoz, ezt másodfokú kockázatkerülésnek is hívják. Beláthatjuk ezen gondolatok alapján azt is, hogy:

$$C^e(w_0, u, k(m + \tilde{x})) \approx km - 0,5k^2 A(w_0) E(\tilde{x}^2)$$

Ezek szerint az abszolút kockázatkerülés A mértékét úgy is interpretálhatjuk, mint azt a legnagyobb pénzösszeget, melyet a befektető w_0 induló jólét és u hasznosságfüggvény esetén hajlandó kifizetni 2 varianciájú kis kockázat elkerülésére. Azonban ahogy növekszik a kockázat lehetséges tartománya, az elméleti (azaz a másodfokú Taylor-közelítésen alapuló) *becsült* prémium nagysága, illetve a valódi (adott konkrét hasznosságfüggvénybol visszszámolható) prémium egyre nagyobb eltérést mutathat:

77. ábra



Definíció szintjén meg kell említeni még a *relatív kockázatkerülés* fogalmát, mely a kockázatot nem mint abszolút összeget (pénzösszeget), hanem a jólét hányadát tekinti:

$$R(w_0) = -\frac{w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)} = w_0 A(w_0)$$

5.1.2 Csökkeno abszolút kockázatkerülés

Az elemzések továbbvitele érdekében további feltételezéseket szoktak tenni. A döntéshozatal előtti jóléti állapot és a kockázati prémium nagysága összefügghet – realisztikusnak tunik az a feltételezés, hogy ha gazdagabb egy illető, kevesebb kockázati prémiumot hajlandó fizetni azonos nagyságrendű kockázat elkerülése érdekében. Ez a csökkeno abszolút kockázatkerülés (*Decreasing Absolute Risk Aversion, DARA*) hipotézise tehát $\forall w_0, \tilde{x}: \partial p(w_0, u, \tilde{x}) / \partial w_0 \leq 0$ formában fogalmazható meg. Ez az Arrow-Pratt-közelítésből adódóan akkor igaz, ha $A(w_0)$ w_0 -nak csökkeno függvénye, \tilde{x} nagyságától függetlenül. A

$$\frac{\partial p(w_0, u, \tilde{x})}{\partial w_0} = \frac{u'(w_0 - p(w_0, u, \tilde{x}) - E(u'(w_0 + \tilde{x})))}{E(u'(w_0 + \tilde{x}))}$$

derivált akkor negatív, ha a számláló negatív mivel a nevező minden esetben pozitív. A kockázati prémium tehát a vagyon nagyságának csökkeno függvénye, ha

$$\forall w_0, p, \tilde{x}: E(u(w_0 + \tilde{x})) = u(w_0 - p) \Rightarrow E(u'(w_0 + \tilde{x})) \geq u'(w_0 - p).$$

Ez a felírás már ismerős, hasonló gondolatmenetet követtünk, amikor két szereplő kockázatkerülését hasonlítottuk össze, azaz ha $u_2 \equiv u$ és $u_1 \equiv -u'$ behelyettesítéseket elvégezzük, és visszaemlékszünk arra, hogy az egyenlőtlenség teljesülésének szükséges és elegendő feltétele, hogy u_1 jobban kockázatkerülő legyen, mint u_2 . Azaz jelen esetben $-u'$ konkávabb kell legyen, mint u . Az $-u'$ konkávságnak mértékét az *abszolút prudencia fokával* definiáljuk:

$$P(z) = -\frac{u'''(z)}{u''(z)}$$

Az $-u'$ konkávabb, mint u , ha $-u'$ konkávságának foka nagyobb, mint u konkávsága, azaz $P(w_0) > A(w_0)$. Ez ekvivalens azzal, hogy A a jólét nagyságának csökkeno függvénye, mivel $A'(w_0) = A(w_0)[A(w_0) - P(w_0)]$.

Egyszerű hasonlaltal élve a *DARA* feltételezés arra a pszichológiai jellemvonásra világít rá, hogy abban az esetben, ha 100 Ft vagyonom van, sokkal kevésbé szeretnék 10 Ft-ot kockáztatni, mintha 1000 Ft vagyonom lenne. A relatív kockázatelutasítás már nem ennyire egyszerű. Mikor kockáztatok szívesebben 10%-nyi vagyont? Ha 100 vagy ha 1000 Ft a vagyonom? 10% kockázat az első esetben 10, a második esetben 100 Ft kockáztatásának felel meg. Így sok esetben a relatív kockázatkerülést a vagyon nagysága növekvő függvényének is feltételezik – minthogy egyre nagyobb abszolút összegű potenciális veszteségekről van szó...

Az elemzések analitikus véghezvitele érdekében bizonyos további feltételezésekre van szükség – így a hasznosságfüggvény alakját illetően is. Jól alkalmazható analitikusan a *harmonikus abszolút kockázatkerülés* (HARA) család, melynek kiinduló feltételezése szerint az abszolút kockázatkerülés inverze a jólét lineáris függvénye. A függvénycsalád általános alakja:

$$u(z) = z \left(h + \frac{z}{g} \right)^{1-g}$$

valamint ebből adódóan a fontos származtatott mutatói:

$$\begin{aligned} A(z) &= \left(h + \frac{z}{g} \right)^{-1} \\ P(z) &= \frac{g+1}{g} \left(h + \frac{z}{g} \right)^{-1} \\ R(z) &= z \left(h + \frac{z}{g} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Mivel a x , h és g paramétereknek közvetlenül nem könnyű közgazdasági értelmezést tulajdonítani, ezen paraméterek különös esetei szolgálnak megkülönböztetett hasznosságfüggvény-alakokkal:

Konstans relatív kockázatkerülés (CRRA)

Ha $h=0$, akkor $R(z)=g$, amely feltételezés szerint nemnegatív. Így tehát a $h=0$ esetben a relatív kockázatelutasítás független az induló jólét nagyságától, és a hasznosságfüggvény alakja:

$$u_r(z) = \begin{cases} z^{1-g} / (1-g); & g \neq 1 \\ \ln(z); & g = 1 \end{cases}$$

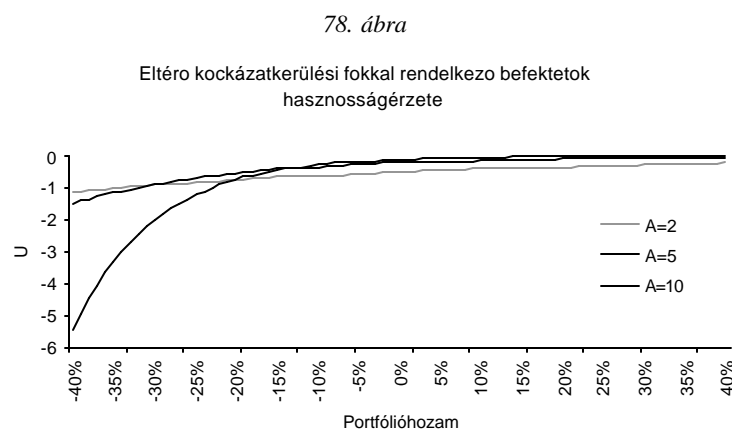
Fontos megemlíteni, hogy mindezen függvények egyben *DARA* tulajdonságot is mutatnak, mivel $A'(z) = -g/z^2$.

Konstans abszolút kockázatkerülés (CARA)

Láthatjuk, hogy $A(z)$ függetlenné válik z jóléttől, ha $g \rightarrow \infty$, és ekkor $A(z) = A = 1/h$. Definíciója szerint ez az eset nem teljesíti a *DARA* tulajdonságot. A hasznosságfüggvény alakja pedig:

$$u_a(z) = -\frac{\exp(-Az)}{A}.$$

A konstans averzió melletti hasznosságfüggvények lehetséges formáit mutatja az alábbi ábra:



5.1.3 A klasszikus portfólióelmélet megközelítése⁷³

A korábbiakban összefoglalt összefüggések általános érvényűek, azonban elemzésünket a portfólió-allokációra kell, hogy szűkítsük. Legegyszerűbb portfóliódöntés az az eset, amikor az allokálandó vagyont a *kockázatmentes* és a *kockázatos* befektetési szektor között kell felosztani. További empirikus elemzésünk

⁷³ Megjegyzem, hogy dolgozatomban jelen fejezetében a portfóliókiválasztás klasszikusnak tekinthető, *hozam-variancia* összefüggésére koncentrálok. A gyakorlat szempontjából ez természetesen nem tekinthető a portfóliókiválasztási szabályok teljeskörű áttekintésének. Egy szélesebbkörű összehasonlítást publikáltunk korábban, lásd: Walter, Kóbor [2001]

nagyrészt meg is marad ezen a kételemu szinten, minthogy tapasztalataink alapján stresszhelyzetben a reallokáció (*menekülés a biztonságba*) valóban jól modellezhető ezzel a kétszektoros esettel. Erre utaltak az alábbiak:

- a kockázatos eszközök közötti korrelációk megnöttek,
- a kockázatos eszközöket leíró faktorok száma csökken stresszes időszakokban (noha nem is éppen 1-re),
- az intenzív keresleti-kínálati viszonyváltozás hatására minden kockázatos szektor és az állampapír szektor közötti korreláció erosen negatívvá vált.

Mielott továbblépnénk, egy rövid utalást kell tennünk. Láttuk, hogy a kockázati prémium biztosan növekszik, ha a befekteto kockázatelutasítási foka növekszik. A *sztochasztikus dominancia* elmélete azzal foglalkozik, hogy a kockázat változása hatására miként változik a kockázati prémium, azaz \tilde{x}_1 és \tilde{x}_2 milyen különbözősége eredményezheti $p(u, \tilde{x}_1) \geq p(u, \tilde{x}_2)$ egyenlotlenség, avagy ekvivalens módon $E(u(\tilde{x}_1)) \leq E(u(\tilde{x}_2))$ fennállását. A preferenciarendezés nem minden esetben teljes. *Rotschild* és *Stiglitz*⁷⁴ megmutatták, hogy ha konkáv növekvő hasznosságfüggvényeket tekintünk, minden esetében megnövekszik a kockázati prémium nagysága, ha a kockázatonövekedés a *várható érték változatlansága* mellett következik be. Azaz $\tilde{x}_1 =_d \tilde{x}_2 + \tilde{e}$ és $E(\tilde{e}|\tilde{x}_2 = x) = 0$ esetén igaz az $E(u(\tilde{x}_1)) \leq E(u(\tilde{x}_2))$ egyenlotlenség, az \tilde{x}_2 másodrendu sztochasztikus dominanciát mutat \tilde{x}_1 felett.

Tegyük fel, hogy befektetünk W vagyonát a biztos, kockázatmentes r hozamú állampapírba, valamint \tilde{x}_0 várható hozamú, kockázatos szektorba allokálhatja, és feltételezésünk szerint a befekteto u hasznosságfüggvénye növekvő és konkáv.

Amennyiben a befekteto a összeget allokál a kockázatos szektorba, $(W-a)$ jut a kockázatmentes állampapírra, és így portfóliójának periódus végi értéke:

$$(W - a)(1 + r) + a(1 + \tilde{x}_0) = W(1 + r) + a(\tilde{x}_0 - r) = w_0 + a\tilde{x}$$

⁷⁴Részletes tárgyalása: *Rotschild, Stiglitz* [1970] és uo. [1971]

ahol w_0 ezúttal a vagyoni kockázatmentes kamatlábbal számított jövőértéke, és \tilde{x} a kockázatos szektor kockázatmentes állampapír⁷⁵ feletti hozama. Az allokációs feladat tehát:

$$\max_{\mathbf{a}} V(\mathbf{a}) = E(u(w_0 + \mathbf{a}\tilde{x}))$$

Ha a hasznosságfüggvény differenciálható, akkor az optimális \mathbf{a}^* kockázatos allokáció kielégíti a

$$V'(\mathbf{a}^*) = E(\tilde{x}u'(w_0 + \mathbf{a}^*\tilde{x})) = 0$$

egyenletet, továbbá ez valóban *maximum* megoldást ad, mivel u függvény konkáv, ezáltal V függvény második deriváltja negatív, tehát V is konkáv. Megállapíthatjuk, hogy kockázatkerülő befektető akkor és csak akkor alokál pozitív vagyónhányadot kockázatos eszközbe, ha annak várható többlethozama pozitív.

Mi lesz az optimális megoldás *kis* kockázat esetén? Bontsuk fel a többlethozamot várható értékre és kockázatra: $\tilde{x} = k\mathbf{m} + \tilde{y}$, ahol $\mathbf{m} > 0$ és $E(\tilde{y}) = 0$. Ekkor az \mathbf{a}^* optimális allokáció k függvénye, és $\mathbf{a}^*(0) = 0$. Ha k pozitív, az optimális allokációt az alábbi egyenlet megoldásával kapjuk:

$$E((k\mathbf{m} + \tilde{x})u'(w_0 + \mathbf{a}^*(k)(k\mathbf{m} + \tilde{x}))) = 0$$

k szerint differenciálva:

$$[\mathbf{m}Eu'(\tilde{w}) + \mathbf{a}^*(k)\mathbf{m}E(k\mathbf{m} + \tilde{y})u''(\tilde{w})] + \mathbf{a}^{*'}(k)E(k\mathbf{m} + \tilde{y})^2 u''(\tilde{w}) = 0, \text{ ahol}$$

$$\tilde{w} = w_0 + \mathbf{a}^*(k)(k\mathbf{m} + \tilde{y}).$$

$k=0$ helyen kiértékelve

$$\mathbf{a}^{*'}(0) = \frac{\mathbf{m}}{E(\tilde{y}^2)} \frac{1}{A(w_0)}$$

Az $\mathbf{a}^*(k)$ $k=0$ közeli Taylor-soros közelítése szerint $\mathbf{a}^*(k) \approx \mathbf{a}^*(0) + k\mathbf{a}^{*'}(0)$, azaz

$$\mathbf{a}^* \approx \frac{E(\tilde{x})}{E(\tilde{x} - E(\tilde{x}))} \frac{1}{A(w_0)}$$

Azt az eredményt kaptuk tehát, hogy a kockázatos szektorba történő optimális allokáció a várható többlethozam és varianciájának hányadosával arányos. *Rendkívül speciális* eset, ha feltételezzük, hogy a befektetők *egyrészt* konstans abszolút

⁷⁵ A *kockázatmentes állampapír* fogalmát elméleti síkon alkalmazzuk. Egyfelől a globális befektetők szemében nem minden állam adósságpapírja kockázatmentes – különös tekintettel Oroszország 1998-as eseményeire –, illetve az állampapírok – kamatszerkezetüktől és futamidejüktől függően –

kockázatkerüléssel jellemezhetők, *másrészt* a hozamok nem másis eloszlást követnek. Ugyanakkor modellezési oldalról megéri ezekkel a feltevésekkel élni, mert igen elegáns eredményre juthatunk:

$$u(z) = -\exp(-Az)/A$$

$$\tilde{x} \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$$

Ekkor ugyanis a

$$V(\mathbf{a}) = -\frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}\mathbf{s}^2}} \int \exp(-A(w_0 + \mathbf{a}x)) \exp\left(-\frac{(x-\mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2}\right) dx = -\exp\left(-A\left(w_0 + \mathbf{a}\mathbf{m} - \frac{A\mathbf{a}^2\mathbf{s}^2}{2}\right)\right)$$

Ez a levezetés az $\mathbf{a}x = \mathbf{a}(\mathbf{m} - 0,5\mathbf{a}\mathbf{s}^2)$ behelyettesítéssel adódik. Az optimális \mathbf{a} allokáció az, amely maximalizálja a $\mathbf{a}\mathbf{m} - 0,5A\mathbf{a}^2\mathbf{s}^2$ kifejezést. Megjegyzendo, hogy sokszor magát ezt a kifejezést tekintjük hasznosságfüggvénynek. A vagyonsfüggvényünket maximalizáló megoldás tehát:

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2} \frac{1}{A}$$

Belátható, hogy a kockázatelutasítási együttható növekedésével csökken a kockázatos szektor allokációja. Korábbi megállapításaink szerint a vagyonban bekövetkezett csökkenés pedig csak DARA esetben vezet az allokáció csökkenéséhez.

Ezt a hosszas függelékert azért találtam szükségesnek, mert így emlékeztetünk arra, mennyi szükséges feltételezés mellett alkalmazhatjuk a jól ismert konstans abszolút kockázatkerülési együtthatóan alapuló hasznosságfüggvényt – amely függvény persze analitikus oldalról valóban könnyen használható. Ugyanakkor persze a pénzügyi szakirodalom egyáltalán nem szukíti le az elemzést – kiváló összefoglalást és áttekintést nyújt például Merton [1982] az eddig tárgyalt kérdésekről.

viselnek kamatlábkkockázatot. Így az elméleti kockázatmentes eszközünk például valamely OECD állam *rövidlejárati* papírjaként fogható fel.

5.2 Stabil eloszlások szimulációja

A stabil eloszlású változók szimulációs módszere Weron, Weron [1996] alapján:

Kiinduláshoz szimulálnunk kell $v \sim U\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ valamint egy tole független w

változót, amely 1 várható értékű exponenciális véletlen változó. Eredményül az x stabil véletlenszámot kapjuk:

$a \neq 1$ esetre:

$$x = S_{a,b} \cdot \frac{\sin(a(v + B_{a,b}))}{(\cos(v))^{1/a}} \cdot \left(\frac{\cos(v - a(v + B_{a,b}))}{w} \right)^{(1-a)/a}, \text{ ahol}$$

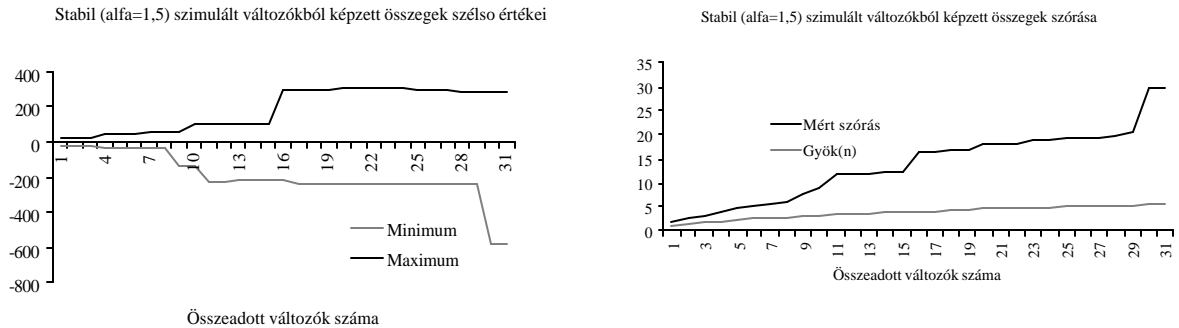
$$B_{a,b} = \frac{\arctan\left(b \tan \frac{pa}{2}\right)}{a}$$

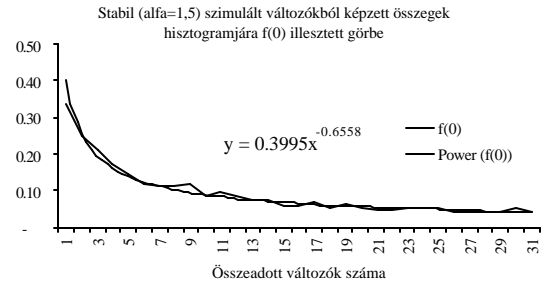
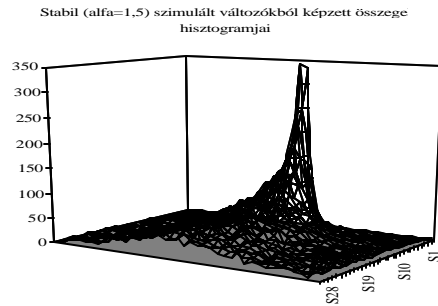
$$S_{a,b} = \left[1 + b^2 \tan^2 \frac{pa}{2} \right]^{1/(2a)}$$

A normális illetve 2-nél kisebb karakterisztikus exponenssel rendelkező változók illusztratív tehát összehasonlítására 1,5 illetve 2-es exponensű véletlen változóból 1000 darabot szimuláltam egy időegységre (1 napra) szimuláltam, és ezt megismételtem 31-szer, majd adtam össze 1-től 31-ig. (Így összesen 31-szer 1000 darab változó került szimulálásra).

Az $\alpha=1,5$ -ös eset:

79. ábra

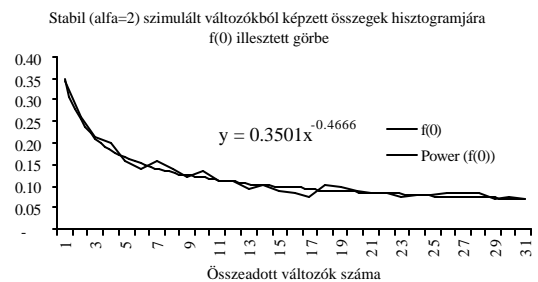
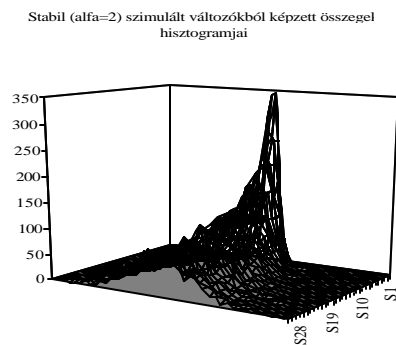
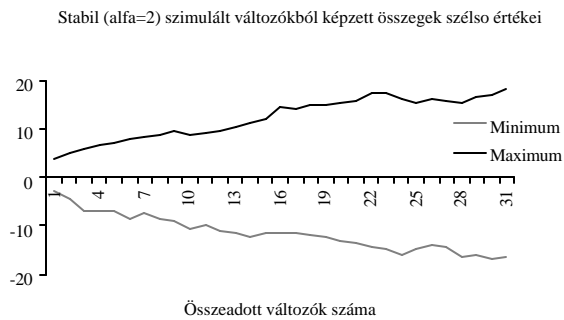




Vegyük észre, hogy a histogramra illesztett polinom exponense $-0,6558$, melynek inverze $-1,5249$, abszolút értékben *majdnem* pontosan $1,5$.) A *Mantegna, Palágyi* [1998] módszer hasonlóképpen becsli a karakterisztikus exponenst.

Az $\alpha=2$ -es eset:

80. ábra



Ebben az esetben a histogram csúcsára illesztett polinom exponense $-0,4666$, mely inverzének abszolút értéke 2 .

5.3 A rezsimváltó modellek becsléséhez alkalmazott E-M algoritmus technikai lépései

„Expectation” lépés

A becslési eljárás során az alábbi technikai lépéseket kell követnünk (Diebold et al. [1994]):

1. számítsuk ki a feltételes suruségfüggvény-értékeket minden y_t -re ($T \times 2$ mátrix)

$$f(y_t | s_t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\Omega_t)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - \mathbf{m}_t)' \Omega_t^{-1} (y_t - \mathbf{m}_t) \right\}$$

illetve adjunk induló becslést az átmenet valószínűségekre (1×4 vektor – időben állandó átmenetvalószínűségeket feltételezve).

2. Számítsuk ki a szurt együttes állapotvalószínűségek ($T \times 4$) mátrixát a 2.1.-2.4. lépések $t=2, \dots, T$ -re történő iterációjával:

- 2.1. számítsuk ki a (y_t, s_t, s_{t-1}) együttes, y_t -re nézve *feltételes* suruségfüggvényét (minden t -re 4 számérték adódik becslésként). A $t=2$ esetre:

$$f(y_2, s_2, s_1 | y_1; \mathbf{q}^{(j-1)}) = f(y_2 | s_2) P(s_2 | s_1) P(s_1)$$

illetve a további t -kre:

$$f(y_t, s_t, s_{t-1} | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)}) = \sum_{s_{t-2}=0}^1 f(y_t | s_t) P(s_t | s_{t-1}) P(s_{t-1}, s_{t-2} | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})$$

ahol a $f(y_t | s_t)$ feltételes suruségfüggvények és a $P(s_t | s_{t-1})$ átmenet valószínűségek az 1. lépés kalkulációinak eredményei, a $P(s_{t-1}, s_{t-2} | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})$ szurt valószínűsége pedig a 2-es lépés előző t megfigyelésre történő végrehajtásából adódik.

- 2.2. számítsuk ki y_t -re a feltételes likelihood értéket (adott t -re 1 számérték adódik becslésként):

$$f(y_t | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)}) = \sum_{s_t=0}^1 \sum_{s_{t-1}=0}^1 f(y_t, s_t, s_{t-1} | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})$$

2.3. számítsuk ki a t -ido szerint szurt állapot-valószínűségeket (4 számérték adott t -re):

$$P(s_t, s_{t-1} | y_t; \mathbf{q}^{(j-1)}) = \frac{f(y_t, s_t, s_{t-1} | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})}{f(y_t | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})}$$

2.4. a 2.3. lépés elvégzése után ez a négy szurt valószínűség kerül a 2.1. lépésbe induló bemeneti adatként a következő periódus szurt valószínűségeinek kiszámításához. A 2.1.-2.4. lépések (T-2) alkalommal kerülnek végrehajtásra.

3. Számítsuk ki a simított együttes valószínűségeket az alábbiak szerint⁷⁶ (eredményként egy (T-1×6)-os mátrixot kapunk).

3.1. $t=2$ -re és (s_t, s_{t-1}) párokra szekvenciálisan számítsuk ki az $(s_t, s_{t-1}, s_t, s_{t-1})$ együttes valószínűségeket, y_t megfigyelés mellett, minden $t=t+2, t+3, \dots, T$ -re.

$$P(s_t, s_{t-1}, s_t, s_{t-1} | y_t; \mathbf{q}^{(j-1)}) = \frac{\sum_{s_{t-2}=0}^1 f(y_t | s_t) P(s_t | s_{t-1}) P(s_{t-1}, s_{t-2}, s_t, s_{t-1} | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})}{f(y_t | y_{t-1}; \mathbf{q}^{(j-1)})}$$

ahol a számláló két első tagja az 1. lépésből származik, a harmadik az előző 3.1. lépésből, a nevező pedig a 2.2. lépésből. $t=t+2$ esetre a számláló 3-ik tagjának kezdő értéke az alábbi kifejezéssel határozható meg:

$$P(s_{t+1}, s_t, s_{t-1} | y_{t+1}; \mathbf{q}^{(j-1)}) = \frac{\sum_{s_{t-2}=0}^1 f(y_{t+1} | s_{t+1}) P(s_{t+1} | s_t) P(s_t, s_{t-1} | y_t; \mathbf{q}^{(j-1)})}{f(y_{t+1} | y_t; \mathbf{q}^{(j-1)})}$$

Minden lehetséges t -ra kalkulálunk egy (4×1) valószínűség-vektort, minden lehetséges (s_t, s_{t-1}) állapotpárnak megfelelően. Így, mire elérjük $t=T$ -t, egy (T-3)×4-es mátrix áll a rendelkezésünkre, melynek utolsó sorát használjuk fel a 3.2. lépésben.

⁷⁶ Mit is jelent gyakorlatban ez a simított valószínűség? Azt, hogy minden egyes egymást követő eseménypárra, illetve a megfigyelést követő összes többi eseménypárra végigfuttatunk egy együttes valószínűség becslést.

3.2. mire elérjük $t=T-1$ -t, a simított együttes állapotvalószínűség t időpontra és egy választott (s_t, s_{t-1}) állapotpárra az alábbi módon számítható ki:

$$P(s_t, s_{t-1} | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) = \sum_{s_T=0}^1 \sum_{s_{T-1}=0}^1 P(s_T, s_{T-1}, s_t, s_{t-1} | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)})$$

3.3. 3.1. és 3.2. lépések minden lehetséges t -re és (s_t, s_{t-1}) állapotpárra végrehajtásra kerülnek, amíg végül minden állapot-négyesre nem kapunk simított valószínűséget. Az első kör után egy (1×4) -es simított együttes valószínűségvektorunk van (s_t, s_{t-1}) állapotpárra.

3.4. a 3.1-3.3. lépések ismétlésre kerülnek minden $t=3, 4, \dots, T$ -re, egy $(T-1 \times 4)$ -es simított együttes állapotvalószínűség mátrixot eredményezve.

4. A simított állapotvalószínűségeket a simított együttes állapotvalószínűségekből kapjuk, például:

$$P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) = P(s_t = 1, s_{t-1} = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)}) + P(s_t = 1, s_{t-1} = 0 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)})$$

A simított valószínűségek $(T-1 \times 6)$ mátrixa szolgál bemenő adatként a maximalizálási lépéshez.

„Maximization” lépés

Hamilton megmutatja, hogy az alábbi becslések a loglikelihood függvény maximumához történő konvergenciához vezetnek:

- a várható érték becslése:

$$\mathbf{m}^{(j)} = \frac{\sum_{t=1}^T y_t P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)})}{\sum_{t=1}^T P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)})}$$

- a variancia becslése:

$$(\mathbf{s}_i^2)^{(j)} = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \mathbf{m}_i^{(j)})^2 P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)})}{\sum_{t=1}^T P(s_t = 1 | y_T; \mathbf{q}^{(j-1)})},$$

továbbá a kovarianciák hasonló logikával számíthatók.

- az állapotvalószínűség becslése:

$$P(s = i) = \frac{\sum_{t=1}^T P(s_t = i | y_t; \mathbf{q}^{(j-1)})}{T}$$

- és végül a becsült átmenetvalószínűség:

$$P(s_t = i | s_{t-1} = i) = \frac{\sum_{t=2}^T P(s_t = i, s_{t-1} = i | y_T, \mathbf{q}^{(j-1)})}{\sum_{t=2}^T P(s_t = i | y_T, \mathbf{q}^{(j-1)})}$$

Miután végrehajtottuk a fenti számításokat, rendelkezésünkre áll a paraméterek $\mathbf{q}^{(j)}$ vektora. Az iteráció az E -lépéssel folytatódik mindaddig, amíg az előírt konvergencia-kritériumok nem teljesülnek.

Hivatkozások

- Ait-Sahalia, Y., Lo, A. W. [1997]: *Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion*. The University of Chicago és Massachusetts Institute of Technology, National Bureau of Economic Research Working Paper 6130
- Alexander, C. O., Leigh, C. T. [1997]: *On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models*. The Journal of Derivatives 1997. tavasz
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D. [1998]: *Coherent Measures of Risk*. ETH Zürich
- Árvai, Zs., Vincze, J. [1998]: *Valuták sebezhetősége - pénzügyi válságok a kilencvenes években*. Közgazdasági Szemle, XLV. évf., 1998. június
- Bae, Kee-Hong, Karolyi, G. A., Stulz, R. M. [2000]: *A new approach to measuring financial contagion*. Hong Kong University of Science and Technology, The Ohio State University és The Ohio State University, working paper
- Bahra, B. [1997]: *Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application*. Bank of England, ISSN 1368-5562
- Baig, T., Goldfajn, I. [1998]: *Financial Market Contagion in the Asian Crisis*. IMF Working Paper WP/98/155
- Bangia, A., Diebold, F. X., Schuermann, T., Stroughair, J. D. [1999]: *Modeling Liquidity Risk, With Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management*. The Wharton School, University of Pennsylvania, 99-06
- Barnhill, T. M., Maxwell, W. F. [1999?]: *Modeling Correlated Interest Rate, Exchange Rate and Credit Risk in Fixed Income Portfolios*. The George Washington University, Texas Tech University working paper
- Barnhill, T. M., Papapanagiotou, P., Schumacher, L. [2000]: *Measuring Integrated Market and Credit Risks in Bank Portfolios: An Application to a Set of Hypothetical Banks Operating in South Africa*. IMF Working Paper
- Barnhill, T. M., Papapanagiotou, P., Souto, M. R. [2001]: *Preemptive Strategies for the Assessment and Management of Financial System Risk Levels: an Application to Japan with Implication for Emerging Economies*. George Washington University working paper
- Baum, C. F., Bekdache, B. [1996]: *Factor-GARCH Modeling of the Treasury Term Structure*. Boston College, Wayne State University
- Benedek, G., Kóbor, Á., Pataki, A. [2001]: *Modeling Dependence with m-Variate Copulas and Application to Equity Portfolios*. Working Paper
- Benedek, G., Kóbor, Á., Pataki, A. [2002]: *A kapcsolatszorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások*. Közgazdasági Szemle XLIX. 480-497., 2002. február

- Berkelaar, A., Cumperayot, P., Kouwenberg, R. [2001]: *The Effect of VaR Based Risk Management on Asset Prices and the Volatility Smile*. The World Bank, Erasmus University és Aegon Asset Management Working Paper
- Bhattacharya, S., Constantinides, G. M. szerk. [1989]: *Theory of Valuation - Frontiers of Modern Financial Theory*. Rowman & Littlefield Publishers, Inc., New Jersey
- Billio, M., Pelizzon, L. [2000]: *Value at Risk: a Multivariate Switching Regime Model*. GRETA Working Paper n 00.04
- BIS [1997]: *The Measurement of Aggregate Market Risk - A joint exploration by a group of central bank researchers*. Bank of International Settlement; Bázel
- BIS [1999]: *A Review of Financial Market Events in Autumn 1998*. Bank of International Settlement; Bázel, 1999. október
- BIS [2000]: *Stress Testing by Large Financial Institutions: Current Practices and Aggregation Issues*. Bank of International Settlement; Bázel, 2000. április
- Bollerslev, T. [1986]: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics 31
- Bouyé, E., Durrleman, A., Riboulet, G., Roncalli, T. [2000]: *Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications*. Financial Econometrics Research Centre, City University Business School London és Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais working paper
- Breeden, D. T., Litzenberger, R. H. [1978]: *Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices*. Journal of Business, Vol. 51., No. 4.
- Byström, H. [2000]: *Orthogonal GARCH and Covariance Matrix Forecasting in a Stress Scenario: The Nordic Stock Markets During the Asian Financial Crisis 1997-1998*. Lund University, Working Paper
- Calvo, G. [1999]: *Contagion in Emerging Markets: when Wall Street is a Carrier*. University of Maryland, discussion paper
- Calvo, G. A., Mendoza, E. G. [1999]: *Rational Contagion and the Globalisation of Securities Markets*. University of Maryland and NBER és Duke University és NBER
- Csontos, L., Király, J., László, G. [1997]: *Ezredvégi nagy borzongás*. Közgazdasági Szemle, XLIV. évf., 1997 július-augusztus
- Chang, R., Velsaco, A. [1998]: *Financial Crises in Emerging Markets: A Canonical Model*. Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 98-10
- Cochrane, J. H. [2001]: *Asset Pricing*. Princeton University Press, Princeton and Oxford
- Cooper, N. [1999]: *Testing Techniques for Estimating Implied RNDs from the Prices of European-Style Options*. Bank of England, BIS Workshop at the BIS on 14 June 1999 working paper
- Coutant, S. [1999]: *Implied Risk Aversion in Option Prices Using Hermite Polynomials*. Banque de France, BIS Workshop at the BIS on 14 June 1999 working paper

- Dell’Ariccia, G., Marquez, R. [2000]: *Flight to Quality or to Captivity? Information and Credit Allocation*. IMF–Research Department és University of Maryland
- Diamond, D. W., Dybwig, P. H. [1983]: *Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity*. Journal of Political Economy, vol. 91., no. 31.
- Diamond, D. W., Rajan, R. G. [2000]: *Banks, Short Term Debt and Financial Crises: Theory, Policy - Implications and Applications*. University of Chicago és NBER
- Diebold, F., Joon-Haeng, L., Weinbach, G. [1994]: *Regime-switching with time-varying transition probabilities*. in: Hargreaves (szerk.) Nonstationary time series analysis and cointegration; Oxford University press, pp. 284-302
- Duffie, D., Pan, J. [1997]: *An Overview of Value at Risk*. The Journal of Derivatives 1997. tavasz
- Durrleman, V., Nikeghbali, A., Roncalli, T. [2000]: *Which copula is the right one?* Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais working paper
- Eeckhoudt, L., Gollier, C., Schlesinger, H. [1996]: *Changes in Background Risk and Risk Taking Behaviour*. Econometrica 64. 683-90
- Eichengreen, B., Hale, G., Mody, A. [2000]: *Flight to Quality: Investor Risk Tolerance and the Spread of Emerging Market Crises*. University of California, University of California és Világbank, in: International Financial Contagion, szerk. Claessens, S. és Forbes, K., MIT és IMF
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. [1997]: *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer; Berlin
- Embrechts, P., McNeil, A., Strauman, D. [1999]: *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*. ETHZ Working paper
- Enders, W [1995]: *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons, New York
- Engle, R. F. [1982]: *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation*. Econometrica, 50
- Engle, R. F., Rosenberg, J. V. [1997]: *Option Hedging Using Empirical Pricing Kernels*. University of California, Discussion Paper 97-20
- Engle, R. F., Mezrich, J. J., Bielinski, B. M. [1997]: *The GARCH Approach to Volatility and Correlation*. in: *Risk Management for Financial Institutions*. Price Waterhouse és Risk Publications, London
- Fama, E. F. [1965]: *The Behaviour of Stock-Prices*. Journal of Business, Vol. 38., Issue 1.
- Fang, K., Kotz, S., Wan, K. N. [1990]: *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman & Hall, London
- Fernando, C. S., Herring, R. J. [2001]: *Liquidity Shocks, Systemic Risk, and Market Collapse: Theory and Application to the Market for Perps*. The Wharton School, University of Pennsylvania, Working Paper 01-34
- Fofack, H., Nolan, J. P. [1999]: *Tail Behavior, Models and Other Characteristics of Stable Distributions*. American University, Department of Mathematics and Statistics

- Forbes, K. J., Rigobon, R. [2001]: *No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Co-Movements*. Working Paper (Journal of Finance közlésre elfogadta)
- Franke, G., Stapleton, R., Subrahmanyam, M. G. [2001]: *Standard Risk Aversion and the Demand for Risky Assets in the Presence of Background Risk*. University of Konstanz, University of Strathclyde és Stern School of Business, working paper
- Füstös, L., Meszéna, Gy., Simonné, M. N. [1986]: *A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei*. Akadémiai kiadó, Budapest
- Gemmil, G., Saflekos, A. [2001]: *How useful are Implied Distributions? Evidence from Stock-Index Options*. BIS Workshop at the BIS on 14 June 1999 working paper
- Glasserman, P., Heidelberger, P., Shahabuddin, P. [2000]: *Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors*. PaineWebber Working Papers Series in Money, Economics and Finance, Columbia Business School
- Gollier C. [2001]: *The Economics of Risk and Time*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts
- Goorbergh, R. W. J., Vlaar, P. J. G. [1999]: *Value-at-Risk of Stock Returns – Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?* De Nederlandsche Bank Staff Reports, No. 40
- Grossman, S. J., Miller, M. H. [1988]: *Liquidity and Market Structure*. The Wall Street Journal, Vol. XLIII. No. 3.
- Grossman, S. J., Stiglitz, J. E. [1980]: *On the Impossibility of Informationally Efficient Market*. University of Pennsylvania és Princeton University
- Hamilton, J. D. [1989]: *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*. Econometrica, Vol. 57, No. 2
- Hamilton, J. D. [1990]: *Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime*. Journal of Econometrics 45, pp39-70, Elsevier Science Publishers
- Hamilton, J. D. [1994]: *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey
- Hardy, M. R. [2001]: *A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns*. North American Actuarial Journal, Vol. 5., No. 2.
- Hull, J. C. [1997]: *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, London
- Huang, C., Litzenberger, R. H. [1988]: *Foundations for Financial Economics*. Elsevier Publishing Co., North-Holland, New York
- IMF [2002]: *Global Financial Stability Report – Market Development and Issues*. Washington
- J. P. Morgan [1996]: *RiskMetrics – Technical Document*. 4. Kiadás. New York
- Jackwerth, J. C. [2000]: *Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns*. The Review of Financial Studies, 2000. nyár, Vol. 13., No. 2.
- Janecskó, B. [2000]: *Idosor-modellezés és opcióárazás a csonkolt Lévy-eloszlással* Közgazdasági Szemle, XLVII 899-917.

- Jánosi, I. M., Janecskó, B., Kondor, I. [1999]: *Statistical analysis of 5 s index data of the Budapest Stock Exchange*. Physica A 269, Elsevier Science
- Jorion, P. [1999]a: *A kockázatosított érték*. Panem, Budapest
- Jorion, P. [1999]b: *Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management*. University of California
- Kim, J., Finger, C. C. [2000]: *A stress test to incorporate correlation breakdown*. The Journal of Risk, Vol. 2., 2000 tavasz
- Király, J. [1995]: *Válságspirál, avagy a magyar bankok tokevesztésének egy lehetséges értelmezése*. Közgazdasági Szemle, XLV. 1995 szeptember
- Király, J. [1998]a: *Beszélgetések a kockázatosított értékrol*. in: Bankról, pénzrol, tozsdéről. A Bankárképzó jubileumi köte te
- Király, J. [1998]b: *A makroökonómia vége, avagy egy megkésett Nobel-díj (Robert E. Lucas)*. Közgazdasági Szemle, XLV. 1998 december
- Kóbor, Á. [2000]: *A feltétel nélküli normalitás egyszeru alternatívái a kockázatosított érték számításában*. Közgazdasági Szemle, XLVII 878-898., 2000. november.
- Kon, S. J. [1984]: *Models of Stock Returns - A Comparison*. Journal of Finance, Vol. 39. Issue 1, 1984. március
- Koutrouvelis, I. A. [1980]: *Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, No. 372
- Kritzman, M., Lowry, K., Dr. Vanroyen, A. [2000?]: *Approximate Indices of Global Risk Aversion*. Revere Street Working Paper Series; Financial Economics 272-3
- Kupiec, P. H. [1995]: *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*. Journal of Derivatives 3
- Lamfalussy, A. [2000]: *Financial Crises in Emerging Markets: an Essay on Financial Globalisation and Fragility*. Yale University Press, New Haven
- Litterman, R., Scheinkman, J. [1991]: *Common Factors Affecting Bond Returns*. The Journal of Fixed Income
- Lore, M., Borodovsky, L. (szerk.) [2000]: *The Professional's Handbook of Financial Risk Management*. Butterworth-Heinemann, Oxford
- Lucas, R. E. [1972]: *Expectations and the Neutrality of Money*. Journal of Economic Theory, 4, 1972. április, 103-124.
- Mandelbrot, B. B. [1963]: *The variation of certain speculative prices*. The Journal of Business, 36
- Mandelbrot, B. B. [1997]: *Fractals and Scaling in Finance - Discontinuity, Concentration*. Risk; Springer, New York
- Markowitz, H. [1952]: *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 1952. március
- Marsh, T., Kobayashi, T. [2001]: *The Contributions of Professors Fischer Black, Robert Merton, and Myron Scholes to the Financial Services Industry*. U.C. Berkeley és The University of Toronto, Discussion Paper

- McCulloch, J.H. [1998]: *Numerical Approximation of the Symmetric Stable Distribution and Density*; in: *A Practical Guide to Heavy Tails – Statistical Techniques and Applications*. szerk.: Adler, Feldman, Taqqu; Birkhauser
- McNeil, A. J., Frey, R. [2000]: *Estimation of tail-related risk measures for heteroskedastic financial time series: an extreme value approach*. Journal of Empirical Finance 7 (2000) 271-300
- Medvegyev, P. [2001]: *Fejezetek a matematikai analízisból és a valószínűség számításból* Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, egyetemi jegyzet, Budapest
- Merton, R. C. [1974]: *On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates*. The Journal of Finance
- Merton, R. C. [1982]: *On the Microeconomic Theory of Investment Under Uncertainty*. Handbook of Mathematical Economics, North-Holland Publishing Company
- Mikolasek, A. [1998]: *A magyar árfolyamrendszer egy elméleti kerete*. Közgazdasági Szemle, XLV. évf. 1998 szeptember
- Miller, M. H. [1998]: *The current Southeast Asia financial crisis*. Pacific-Basin Finance Journal, 225-233
- Mills, T. C. [1993]: *The econometric modelling of financial time series*. Cambridge University Press
- MNB: *Jelentés a pénzügyi stabilitásról*. Magyar Nemzeti Bank, 2000. augusztus, 2001. február, május és november, 2002 december
- Nolan, J. P. [1998?]: *Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions*. American University, Department of Mathematics and Statistics
- Nolan, J. P. [1999]: *Fitting Data and Assessing Goodness-of-fit with Stable Distributions*. American University, Department of Mathematics and Statistics
- Ortobelli, S., Rachev, S., Schwartz, E. [2000]: *The Problem of Optimal Asset Allocation with Stable Distributed Returns*. University of Calabria, University of Karlsruhe és Anderson School of Management, University of California, working paper
- Palágyi, Z., Mantegna, R. N. [1998]: *Empirical investigation of stock price dynamics in an emerging market*. Physica A 269, Elsevier Science
- Palágyi, Z., Korösi, G., Mantegna, R. N. [2000]: *High Frequency Data Analysis in an Emerging and a Developed Market*. working paper
- Peters, E. E. [1994]: *Fractal Market Analysis – Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons, New York
- Pritsker, M. [2000]: *The Channels for Financial Contagion*, in: *International Financial Contagion*. szerk. Claessens, S. és Forbes, K., MIT és IMF
- Qian, E., Gorman, S. [2001]: *Conditional Distribution in Portfolio Theory*. Financial Analyst Journal, 2001. április, 44–51. old.

- Rachev, S., Mittnik, S. [2000]: *Stable Paretian Models in Finance*. Wiley, Chichester
- Rotschild, M., Stiglitz, J. E. [1970]: *Increasing Risk: I. A Definition*. Journal of Economic Theory, 1970. szeptember, Vol. 2, No. 3
- Rotschild, M., Stiglitz, J. E. [1971]: *Increasing Risk: II. Its Economic Consequences*. Journal of Economic Theory, 1971. március, Vol. 3, No. 1
- Ross, S. [1976]: *Options and Efficiency*. Quarterly Journal of Economics, Vol. 90
- Schinasi, G. J., Smith, T. [1999]: *Portfolio Diversification, Leverage, and Financial Contagion*. IMF Working Paper 99-136
- Scholes, M. [2000]: *Crisis and Risk Management*. in.: Risk Budgeting – A New Approach to Investing, edited by Rahl, L. Risk Books, Risk Waters Group, 2000
- Shimko, D. [1993]: *Bounds of Probability*. Risk, Vol. 6., No. 4.
- Shimizu, T. [1997]: *Dynamic Macro Stress Exercise Including Feedback Effect*. Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan – in: BIS [1997]: *The Measurement of Aggregate Market Risk*.
- Stanley, H.E., Amaral, L.A.N., Canning, D., Gopikrishnan, P., Lee, Y., Liu, Y. [1999]: *Econophysics: Can physicists contribute to the science of economics?*, Physica A 269
- Sydsaeter, K., Hammond, P. [1998]: *Matematika közgazdászoknak*. Aula, Budapest
- Száz, J. [1999]: *Tozsdei opciók vételre és eladásra*. Tanszék Kft., Budapest
- The Wall Street Journal* 1998-as számai, opciók árakat tartalmazó oldalak.
- Varikooty, A. P., Liu, J., Huang, H. [1997]: *Predictive Ability of Different Volatility Forecasting Techniques*; in: *Risk Management for Financial Institutions*. Price Waterhouse és Risk Publications, London
- Venkataraman, S. [1996]: *Value at risk for a mixture of normal distributions: The use of quasi-Bayesian estimation techniques*. Federal Reserve Bank of Chicago, Economic Perspectives
- Walter, Gy., Kóbor, Á. [2001]: *Alsóági kockázatomérési eszközök és portfólió-kiválasztás*. Bankszemle 2001/4-5. szám
- Weron, A., Weron, R. [1996]a: *Computer Simulation of Lévy α -Stable Variables and Processes*. The Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods - Technical University of Wrocław
- Weron, R. [1996]b: *Performance of The Estimators of Stable Law Parameters*. The Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods - Technical University of Wrocław
- Wu, L. [1998]: *Investing in the Emerging Markets: Effects of Higher Moments and Predictability*. Stern School of Business, New York University, working paper

A szerző témában megjelent publikációi

- Benedek, G., Kóbor, Á., Pataki, A. [2002]: *A kapcsolatszorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások*. Közgazdasági Szemle XLIX. 480-497., 2002. február
- Kóbor, Á. [2000]: *A feltétel nélküli normalitás egyszeru alternatívái a kockáztatott érték számításában*. Közgazdasági Szemle, XLVII 878-898., 2000. november.
- Kóbor, Á. [2002]: *A pénzügyi piaci válságjelenségek kísérelési jelenségei kockázatkezelési megközelítésben*. Hitelintézeti Szemle, 2002. július
- Walter, Gy., Kóbor, Á. [2001]: *Alsóági kockázatomérési eszközök és portfólió-kiválasztás*. Bankszemle 2001/4-5. szám

Technikai megjegyzések

- ❑ Idosorok forrása: Bloomberg.
- ❑ Maximum likelihood becslés az alfa-stabil eloszlás kivételével minden 1 dimenziós eloszlásra, illetve VaR számítás: saját Eviews-ban írt programjaim
- ❑ Stabil eloszlás becslése *Koutrovelis* módszerével illetve VaR számítás: saját Eviews-ban írt programom
- ❑ Lévy becslés ML módszerrel illetve stabil eloszlás inverz függvénye: *Nolan* által C nyelven írt program.
- ❑ *Forrás: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/>*
- ❑ Kétdimenziós *t*-eloszlás és *t*-kopula becslés ML módszerrel, illetve VaR számítás: saját Eviews-ban írt programom
- ❑ Többdimenziós *t*-eloszlás, *t*-kopula illesztés és VaR: *Pataki Attila* Ph.D. hallgató által C nyelven írt program
- ❑ 2 dimenziós normál, *t*-eloszlás illetve *t*-kopula kontúrok: saját MATLAB programom
- ❑ Stabil eloszlás sűrűségfüggvénye: saját MATLAB programom
- ❑ Optimális eszközallokáció kevert normál eloszlás mellett: saját Excel VB-ben írt programom
- ❑ Implikált kockázatmentes eloszlás illesztése: saját Excel VB-ben írt programom, továbbá köszönetemet fejezem ki *Szalai Zoltánnak* az e témában nyújtott segítségéért.
- ❑ Fokkomponens-elemzés: *SPSS 10.0*
- ❑ Egy és többdimenziós kevert normál eloszlás illesztése illetve rezsimváltó modellek illesztése EM algoritmussal: saját Excel VB-ben írt programom